ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ КУРСЪ

НАГЛЯДНОЙ ГЕОМЕТРІИ.

РУКОВОДСТВО ДЛЯ ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ

НАЧАЛЬНЫХЪ И ГОРОДСКИХЪ ШКОЛЪ И НИЗШИХЪ КЛАССОВЪ, СРЕДНИХЪ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХЪ ЗАВЕДЕНІЙ.

Е. ВОЛКОВА

СЪ 105 ЧЕРТЕЖАМИ ВЪ ТЕКСТѢ И СЪ 667 ЗАДАЧАМИ.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
ТИПОГРАФІЯ И. И. ГЛАЗУНОВА, Б. МѢЩАНСКАЯ, 8
1873.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Геометрія въ начальной школѣ и низшихъ классахъ средняго образовательнаго заведенія еще и по сіе время считается роскошью, о которой пріятно разсуждать въ часы досуга, но безъ которой легко обходятся ученики не достигшіе 13 — 14 лѣтъ — возраста, въ которомъ обыкновенно начинается научный курсъ этого предмета. Нерѣдко высказываются и такія мнѣнія, что этотъ предметъ не долженъ имѣть мѣста среди предметовъ элементарнаго курса, какъ несоотвѣтствующій, по свойствамъ матеріала, степени развитія учениковъ на этой ступени обученія.

Если вспомнить, что еще Песталоцци — «отецъ современнаго направленія педагогики», однимъ изъ главныхъ предметовъ развитія считалъ «ученіе о формѣ», и ставилъ его, съ самыхъ первыхъ ступеней развитія, на ряду съ изученіемъ чиселъ и родной рѣчи—то покажется страннымъ, какъ въ наше время, когда вся педагогическая наука, по справедливости считается лишь развитіемъ принциповъ

этаго педагога—находятся люди, а тѣмъ болѣе педагоги отрицающіе самые существенные изъ нихъ.

Однакоже этотъ фактъ, какъ и все на свѣтѣ, имѣетъ свое объясненіе, если не оправданіе.

Дѣло въ томъ, что всѣ мы, учившіеся геометріи по научнымъ руководствамъ и по схоластическому методу, знаемъ эту науку какъ систему отвлеченныхъ истинъ, открываемыхъ и доказываемыхъ, при помощи пріемовъ очень искуственныхъ и до крайности отвлеченныхъ.

Вдумываясь въ значеніе образовательности предметовъ школьнаго курса, мы допускаемъ геометрію на высшихъ ступеняхъ обученія, но считаемъ ее не возможною для учениковъ начальной школы, нисколько неподготовленныхъ къ отвлеченному мышленію и научнымъ доказательствамъ. Правда, пропедевтическіе курсы геометріи,и курсы ученія о формахъ давно введенные въ нѣмецкихъ, американскихъ и нѣкоторыхъ англійскихъ низшихъ образовательныхъ заведеніяхъ, не безъизвѣстные намъ, должны бы были кажется измѣнить нашъ взглядъ на недоступность геометрическаго матеріала для учениковъ элементарныхъ классовъ, но неудачные опыты преподаванія элементарной геометріи на низшихъ ступеняхъ обученія, недостатокъ руководствъ примѣнимыхъ въ школьной практикѣ по этому предмету удерживаетъ сомнѣвающихся отъ присоединенія къ сторонникамъ введенія геометріи въ курсѣ начальной школы.

Если преподаваніе какого либо предмета въ на-

чальной школѣ сводится на запоминаніе ряда названій, опредѣленій „теоремъ безъ доказательства» и пріемовъ построенія нисколько несвязанныхъ съ тѣмъ, что можетъ наблюдать и самостоятельно перероработывать въ сознаніи ребенокъ; если это преподованіе не дастъ доступной, но въ тоже время достаточно серьезной, на данной ступени развитія ученика, работы мысли — то естественно возникаетъ вопросъ: окупаются ли, время и силы затрачиваемыя учениками на усвоеніе геометрическаго матеріала тѣми образовательными результатами, которые такимъ преподаваніемъ достигаются?

Разумѣется такой вопросъ былъ бы совершенно умѣстенъ, если бы наглядная геометрія не могла быть проходима въ видѣ курса болѣе отвѣчающаго основнымъ требованіямъ практики. Но на самомъ дѣлѣ, это далеко не такъ. Ближайшее ознакомленіе съ дидактическими особенностями матеріала геометріи и исторіей этой науки показывать, что изученіе видимыхъ, наглядныхъ формъ и протяженій не только можетъ, но и должно быть однимъ изъ существенно необходимыхъ направленій развитія умственныхъ способностей ребенка.

Глубокое убѣжденіе въ справедливости только что высказаннаго заставляетъ насъ вѣрить, что недалеко то время, когда ученіе о формахъ и протяженіи не только войдетъ въ число необходимыхъ предметовъ элементарнаго курса, но и станетъ на ряду съ Ариѳметикой и изученіемъ родной рѣчи, какъ

это вытекаетъ уже изъ вышеприведеннаго Песталоцціева принципа.

Въ виду этого, желаннаго будущаго мы рѣшились издать въ свѣтъ предлагаемый курсъ наглядной геометріи, отличающійся отъ существующихъ руководствъ по этому предмету нѣкоторыми существенными особенностями. Можетъ быть онъ хоть сколько нибудь послужитъ разъясненію трудныхъ и мало разработанныхъ вопросовъ методики этого предмета.

Вотъ тѣ положенія которыя легли въ основаніе предлагаемаго курса.

1) Познаніе формъ и протяженій начинается съ *наблюденія* видимыхъ, наглядныхъ формъ, удобныхъ для всесторонняго и точнаго разсмотрѣнія.

2) Дальнѣйшая переработка добытаго такимъ путемъ матеріала заключается *въ образованіи понятій и составленіи опредѣленій.* По мѣрѣ развитія учениковъ, вырабатываемыя понятія и опредѣленія уточняются, такъ что по окончаніи элементарнаго курса, ученики должны быть настолько подготовлены, чтобы отчетливо понимали начальныя опредѣленія научнаго курса геометріи.

3) На изученіи формъ и протяженій выработываются пріемы мышленія, спеціально приложимые къ открытію и доказательству геометрическихъ истинъ и рѣшенію геометрическихъ задачъ. Изучаемые пріемы, по мѣрѣ развитія учениковъ, усложняются и уточняются такъ, что въ концѣ эле-

ментарнаго курса ученики должны быть подготовлены къ строго научному прохожденію систематическаго курса геометріи.

4) Матеріаломъ для элементарнаго курса служатъ формы и протяженія всѣхъ трехъ измѣреній, начиная съ *линій* и затѣмъ переходя къ *поверхностямъ и тѣламъ* *).

5) При выборѣ и расположеніи матеріала имѣлось въ виду какъ можно болѣе частое возвращеніе къ прежде пройденному, разширеніе и обобщеніе его,

---

*) Въ этомъ отношеніи мы отступаемъ отъ общепринятаго въ Германіи (за весьма немногими исключеніями) обыкновенія начинать элементарный курсъ съ разсмотрѣнія тѣлъ. Такое распредѣленіе матеріала оправдывается обыкновенно многими соображеніями, изъ которыхъ самыя вѣскія сводятся къ слѣдующимъ: а) Линія и поверхность суть понятія отвлеченыя естественно получающіяся въ результатѣ разсмотрѣнія тѣлъ, а потому онѣ немогутъ быть даны въ началѣ курса, б) тѣла суть предметы вполнѣ наглядные и знакомые дѣтямъ, а потому скорѣе чѣмъ все другое, поддающееся изученію начинающаго.

Противъ этихъ положеній мы имѣемъ слѣдующее: во первыхъ линіи и поверхности становятся понятіями отвлеченными только въ научномъ курсѣ, гдѣ какъ извѣстно и тѣла являются также понятіями отвлеченными. Въ элементарномъ же курсѣ было бы и невозможно разсмотрѣніе линій и поверхностей, какъ понятій отвлеченныхъ; здѣсь возможно изученіе этихъ элементовъ въ формѣ *наглядной*. Линіи и поверхности (не геометрическія) могутъ быть показаны дѣтямъ также легко какъ и тѣла, если воспользуемся предметами, въ которыхъ обращаетъ на себя вниманіе только длина, или только длина и ширина; а во вторыхъ, начиная съ линій, мы начинаемъ съ предметовъ обладающихъ наименьшимъ числомъ—сравнительно простѣйшихъ свойствъ и генетически подходимъ къ формамъ и протяженіямъ болѣе сложнымъ, на каждомъ шагу возвращаясь къ прежде пройденному, пользуясь имъ и закрѣпляя его въ памяти.

поставленіе въ новую логическую связь съ вновь усвоиваемымъ матеріаломъ, съ цѣлію—возможно болѣе полнаго разъясненія и сознательнаго закрѣпленія въ памяти.

6) Особенное вниманіе обращено на раздѣлываніе задачъ, которое имѣетъ цѣлію, не только приложеніе усвоенныхъ понятій, но—самое главное—*самостоятельное изученіе свойствъ разсматриваемой формы* и пріемовъ разысканія и доказательства истинъ и рѣшенія задачъ.

Въ изложеніи нашего курса обращаетъ на себя вниманіе разнохарактерность. Нѣкоторыя главы, преимущественно вначалѣ, изложены подробно съ катехизаціей, указывающей на характеръ проработки того или другаго понятія; другія изложены сжато, догматически. Такое изложеніе, можетъ быть затрудняющее читателя, вызвано желаніемъ обстоятельнѣе разъяснить характеръ проработки матеріала въ тѣхъ *именно главахъ*; гдѣ *это* намъ показалось наиболѣе важнымъ. Во всякомъ случаѣ, считаемъ необходимымъ оговориться, что *отдѣлы изложенные* въ нашемъ курсѣ догматически, должны быть проходимы также точно, какъ и всѣ остальные отдѣлы, при условіи возможно большей самодѣятельности учениковъ.

Е. Волковъ.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

I.

Прежде всего, преподаватель долженъ убѣдиться въ томъ съ достаточною ли отчетливостью и точностью ученики понимаютъ выраженія: *впереди*, *сзади*, *справа*, *слѣва*, *вверху*, *внизу*, опредѣляющія *относительныя положенія* предметовъ и ихъ изображеній на чертежѣ. Если бы оказалось, что дѣти недостаточно понимаютъ указанныя выраженія, или, что соотвѣтствующія этимъ выраженіямъ понятія объ относительномъ положеніи еще недостаточно у нихъ опредѣлились и выяснились—тогда слѣдуетъ обратить на это серьезное вниманіе и не начинать разсмотрѣнія геометрическихъ элементовъ до уясненія недостающаго. Съ этою цѣлію преподаватель упражняетъ учениковъ въ опредѣленіи относительнаго положенія предметовъ и ихъ изображеній (рисунковъ), при помощи ряда вопросовъ въ родѣ слѣдующихъ:

Гдѣ у насъ потолокъ? — А полъ? — Стѣна съ окнами? — Дверь?—Поднимете правую руку.— Лѣвую. — Какая стѣна у насъ позади?—Протяните руки впередъ.—Вверхъ.—Назадъ.— Поверните лицо вправо. — Влѣво.—Поворотитесь лицомъ къ задней стѣнѣ.

Посмотрите я поставлю на доскѣ крестикъ—кто изъ васъ можетъ поставить еще крестикъ сверху поставленнаго мною или надъ нимъ?—Снизу?—Вправо отъ него?—Влѣво? и т. д.

Здѣсь нужно остерегаться безъ нужды затягивать эти упражненія скоро перестающія интерисовать учениковъ. Если дѣти не затрудняются отвѣтить на вопросы о положеніи предметовъ или крестиковъ, черточекъ... одинъ относительно другаго, то это несомнѣнный признакъ, что слѣдуетъ уже переходить къ разсмотрѣнію геометрическихъ элементовъ.

II.

Учитель ставитъ на большой классной доскѣ *точку* и затѣмъ немного отступя проводитъ черту (вообще кривую) и спрашиваетъ: что я сдѣлалъ на доскѣ?

— Поставили *точку* и провели *черту*.

— Кто изъ васъ можетъ *назначить* на большой доскѣ точку и *провести* черту?—В выйди къ доскѣ и сдѣлай что сказано.

Теперь—каждый у себя въ тетради или на доскѣ—*поставьте* по три точки, а въ сторонѣ *проведите* *) по двѣ черты.

Точку слѣдуетъ дѣлать какъ можно меньшею, хотя замѣтною, для чего остроочиненнымъ концомъ карандаша достаточно слегка надавить на то мѣсто, гдѣ нужно поставить точку. Черта также должна быть не толстая, равной толщины и замѣтная; и она проводится остро-очиненнымъ карандашемъ, причемъ карандашъ надавливается слегка и одинаково во всѣхъ мѣстахъ черты.

Преподаватель выставляетъ на классную доску два-три куска проволоки, окрашенной, если возможно въ бѣлую краску **), прикалываетъ рядомъ нѣсколько кусковъ бѣлаго шнурка въ различныхъ положеніяхъ: въ прямолинейномъ — натянутомъ и криволинейномъ направленіи, и за тѣмъ спрашиваетъ: что выставлено на доскѣ?—Сколько кусковъ шнурка и сколько проволокъ?

Нельзя ли эти шнурки и проволоки нарисовать въ тетради карандашемъ и на доскѣ мѣломъ или грифелемъ?—Что для этаго нужно сдѣлать въ тетради?—Нарисуйте теперь эти проволоки и шнурки у себя въ тетради или на доскѣ, только постарайтесь, чтобы черты были похожими на выставленные шнурки и проволоки.

Затѣмъ выставляются, вырѣзанныя изъ бумаги фигуры съ

---

*) Въ преподаваніи геометріи, какъ и вообще математики необходимо обращать большое вниманіе на возможно большую точность языка, почему и здѣсь уже нужно требовать отъ дѣтей правильности въ выраженіяхъ: черту *проводятъ*, точку *назначаютъ*, *ставятъ*. Всякое другое выраженіе этихъ понятій не должно быть принимаемо какъ неправильное.

**) Вмѣсто проволоки можно взять тонкіе прутья съ ободранной кожицей.

кривыми и прямыми сторонами (краями), а также листъ бумаги, окрашенный (или оклеенный) цвѣтными полосами, или раздѣленный тѣневыми полосами съ прямолинейными и криволинейными краями—и задаются вопросы: можно ли нарисовать края этой фигуры и этой темной или цвѣтной полосы? Нарисуйте чертами края этой фигуры и этой полосы.

А какъ нарисовать острый край (остріе) ножа, ребро линейки, край доски и вообще острый край (ребро), какого бы то нибыло предмета?—Нарисуйте чертами остріе этаго ножа, острый край этой доски, подоконника и т. д.

Теперь перечислите мнѣ что мы рисовали чертами?

— *Проволоки и шнурки, края фигуръ изъ бумаги и тѣневыхъ или окрашенныхъ полосъ на листѣ, острыя края—ребра доски, шкапа и вообще всякаго предмета* и наконецъ *черты*, проведенныя гдѣ бы то ни было.

Запомните, что *все*, что мы рисовали чертами будемъ называть *линіями*.

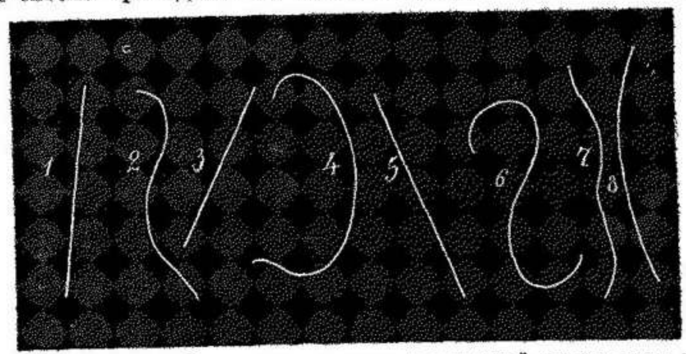
Покажите мнѣ каждый по нѣсколько *линій*.

Теперь скажите—что мы условились называть линіями?

— *Все что можетъ быть изображено чертами, какъ-то: края бумаги, нитку, ребро и т. п.*

III.

Учитель проводитъ на классной доскѣ нѣсколько чертъ,



между которыми нѣкоторыя *прямыя*, различной длины и въ различныхъ направленіяхъ, а остальныя *кривыя*—и спрашиваетъ:

Сколько черть я провелъ на доскѣ—считайте съ лѣва, а я буду, возлѣ каждой черты, ставить нумера: 1, 2, 3 до 8-го.

Посмотрите внимательно на всѣ эти черты и скажите одинаковы онѣ, или различны *по виду*? — Посмотрите, нѣтъ ли между ними *сходныхъ* по виду?—Нѣтъ ли черты *похожей* на 1-ю, 2-ю, 3-ю и т. д.

Какія изъ проведенныхъ черть мы могли бы отобрать какъ *сходныя?*—Какія останутся?

Незнаетъ ли кто изъ васъ какъ называютъ тѣ черты, которыя нужно отобрать какъ сходныя?

— *Прямыми* чертами.

А какъ называются всѣ *не прямыя* черты, которыя у насъ останутся (учитель для упрощенія дѣла стираетъ всѣ прямыя линіи)?

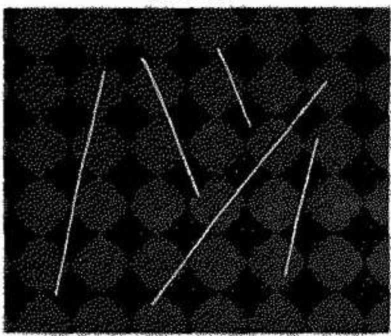
— *Кривыми* чертами.

Если бы вмѣсто черть я прикрѣпилъ къ доскѣ шнуръ, выставилъ проволоки, края, бумаги, ребра различныхъ предметовъ, то узнали бы вы между ними тѣ, которые нужно рисовать прямыми чертами и тѣ, которые рисуются кривыми чертами?

Покажите мнѣ нѣсколько *прямыхъ* реберъ, краевъ бумаги, проволокъ, шнуровъ и т. д.

Такъ запомните же, что всѣ черты, края и ребра похожія на 1-ю, 2-ю, 5-ю и т. д. черты и вообще такіе, которые рисуются прямыми чертами мы будемъ называть *прямыми*, а всѣ непрямыя—*кривыми*.

Фиг. А.

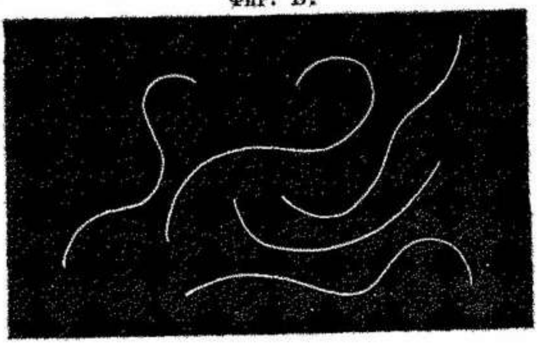


Выставляется рядъ линій въ видѣ прямыхъ (натянутыхъ) и кривыхъ шнурковъ, проволокъ, краевъ бумажныхъ фигуръ, краевъ тѣневыхъ или окрашенныхъ полосъ бумаги и наконецъ реберъ тѣлъ. Каждая такая линія отмѣчается какимъ либо знакомъ или нумеромъ *).

*) У шнурковъ и кусковъ проволоки, а также у краевъ фигуръ и окрашенныхъ полосъ легко поставить нумера, но на ребрахъ тѣлъ прійдется ставить нумера на кускахъ бумаги приколотыхъ къ нимъ хоть булавками

Посмотрите сюда и скажите нѣтъ ли между этими шнур-

Фиг. Б.



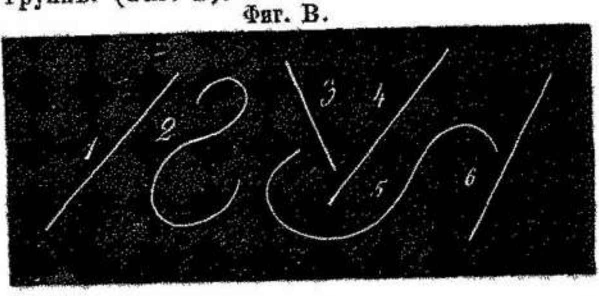
ками, проволоками, краями и ребрами прямыхъ и если есть, то какіе изъ нихъ?

— Какіе изъ нихъ кривые?

Посмотрите сколько группъ чертъ проведено на этой таблицѣ (Фиг. А, Б и В) или на доскѣ? Какія черты въ первой группѣ?—Какія во второй? — Какія въ третьей?

Назовите нумера прямыхъ, а потомъ кривыхъ чертъ въ третьей группѣ. (Фиг. В).

Фиг. В.



Каждый изъ васъ покажетъ—обведетъ рукою—по двѣ кривыхъ и по три прямыхъ на какомъ либо предметѣ въ классѣ на пр. стулѣ, столѣ, окнахъ, стѣнахъ и т. д.

Преподаватель чертитъ на классной доскѣ нѣсколько прямыхъ кривыхъ и *ломаныхъ* чертъ или выставляетъ нѣсколько такихъ же проволокъ, шнуровъ и т. д., и предлагаетъ ученикамъ указать прямыя и кривыя черты и спрашиваетъ: какія черты затѣмъ остаются? — Прямыя или кривыя? А на какія

изъ нихъ оставшіяся похожи? Въ чемъ же заключается это сходство? Изъ какихъ чертъ состоятъ эти ломанныя черты? Эти черты, края бумаги, прутья—словомъ линіи мы будемъ называть *ломаными* потому что они по виду похожи на изломанныя прямыя.

Если бы я пошелъ по прямой тропинкѣ, а Б по кривой, то въ чемъ заключалась бы разница въ моемъ движеніи и движеніи Б?

—Вы бы все шли въ одну сторону, не сворачивая ни вправо ни влѣво, а Б шолъ бы сначала въ одну сторону, потомъ своротилъ бы вправо или влѣво, затѣмъ опять своротилъ бы впередъ или назадъ и т. д.

— А если бы я пошелъ по ломаной дорогѣ, то какъ бы тогда я двигался?

— Тогда вы тоже не шли бы все въ одну сторону, а заворачивали бы вправо, влѣво, впередъ, назадъ.

Въ чемъ же заключается разница между *кривою* и *прямою* линіями?

— *Прямая направляется все въ одну какую либо сторону: съ низу въ верхъ, съ лѣва на право, и т. д., тогда какъ кривая перемѣняетъ свое направленіе: сначала идетъ наприм. вправо, потомъ мало по малу заворачиваетъ влѣво, потомъ вверхъ и т. д.*

Чѣмъ сходствуетъ ломаная линія съ *прямою* и *кривою*.

— *На прямую она походитъ тѣмъ что состоитъ изъ прямыхъ, а на кривую тѣмъ, что мѣняетъ свое направленіе.*

О прямой линіи.

IV.

Какой это прутъ, проволока, шнуръ, рейка? — Нельзя ли кривой или ломаный прутъ, кривыя или ломаныя проволоку или рейку сдѣлать прямыми—*выпрямить*?

— Проволоку, рейку, прутъ можно выгнуть такъ, чтобы они были прямыми, а шнуръ можно вытянуть.

— Возьмите каждый по ниткѣ и покажите какъ можно сдѣлать ее прямою? — А если ослабить нитку, то какою она будетъ—прямою или кривою?

Попробуйте приложить прямую проволоку къ другой пря-

мой проволокѣ же, прямому краю бумаги, ребру и т. д. и посмотрите какъ прилегаетъ первая къ послѣднимъ?

Приложите прямой край бумаги къ прямой чертѣ и опять посмотрите какъ этотъ край прилегаетъ къ чертѣ?

Приложите теперь кривую проволоку къ прямой или кривой проволокѣ или чертѣ и замѣтьте какъ они прилегаютъ другъ къ другу?

Изложите въ полномъ отвѣтѣ что вы замѣтили при наложеніи?

Если бы мы наложили прямую проволоку на прямое же ребро и двигали проволоку по ребру, неразнимая наложенныхъ прямыхъ, то не образуется ли просвѣтовъ при этомъ движеніи?

— Проволока и при движеніи вездѣ плотно прилегаетъ къ ребру.

— Если бы наложенную проволоку мы вращали около самой себя — вертѣли какъ вертятъ веретено — не отнимая отъ ребра, то возможно ли при этомъ плотное, безъ просвѣтовъ прилеганіе прямыхъ?

— Прямыя и при такомъ движеніи плотно прилегаютъ другъ къ другу.

Наблюденія сводятся къ такому изложенію: *прямыя при наложеніи ихъ одна на другую плотно прилегаютъ другъ къ другу; тогда какъ кривыя прилегаютъ только въ нѣсколькихъ мѣстахъ; при движеніи наложенныхъ одна на другую прямыхъ, а равно и при вращеніи одной изъ нихъ какъ веретено—онѣ все таки прилегаютъ другъ къ другу плотно, безъ просвѣтовъ.*

Преподаватель чертитъ нѣсколько волнистую прямую черту и спрашиваетъ у учениковъ: какая это черта?

Нѣкоторые изъ васъ сказали прямая, другіе—кривая; какъ же узнать кто изъ васъ правъ—подумайте?... Вспомните, что нужно было сдѣлать съ ниткой, чтобы она представила прямую линію? Незнаетъ ли кто какъ садовники, пильщики, плотники узнаютъ прямо ли они провели дорожку, распилили доску и т. д?

Какъ же убѣдиться, что черта проведенная мною — прямая?—А не можетъ ли прямая нитка прилегать къ чертѣ и тогда, когда послѣдняя кривая? Теперь повѣрьте съ помощію натянутой нитки—прямa ли черта проведенная на доскѣ?

Вы видите, что она несовсѣмъ что прямая

К. покажи какой-нибудь прямой край на этомъ кускѣ бумаги прямое ребро на этомъ окошкѣ, а Ф. посмотритъ, съ помощію нитки, дѣйствительно ли это прямые край ребромъ.

Проведите, каждый у себя въ тетради, прямую черту и постарайтесь исполнить это, какъ можете, вѣрнѣе. Теперь повѣрьте свою работу и у кого черта оказалась прямою — тотъ подниметъ руку, чтобы мнѣ видно было, кто провелъ дѣйствительно прямую черту.

Большинство изъ васъ провели черту невѣрно, потому что вы проводили отъ руки, а нельзя ли провести вѣрно прямую черту посредствомъ нитки?—Не знаетъ ли кто какъ пильщики, плотники и другіе мастеровые назначаютъ прямыя черты, по которымъ потомъ распиливаютъ доски и бревна? Нельзя ли провести прямую мѣловую черту на большой доскѣ на полу и на вашихъ доскахъ, посредствомъ шнура натертаго мѣломъ?

Вотъ я натру мѣломъ этотъ шнурокъ, а двое изъ васъ назначутъ на классной доскѣ нѣсколько прямыхъ чертъ.

Какъ отбить прямую черту посредствомъ шнура?

— *Чтобы отбить прямую чарту вѣрно, нужно прижать натянутую нитку въ двухъ мѣстахъ, потомъ захватить пальцами посрединѣ и, не отклоняя ее въ стороны, поднять и затѣмъ отпустить, какъ можно быстрѣе разжимая пальцы.*

— Къ слѣдующему уроку каждый изъ васъ сдѣлаетъ такимъ же образомъ по три прямыхъ черты на своихъ доскахъ— я ихъ посмотрю.

V.

Не знаетъ ли кто-либо изъ васъ другаго способа удостовѣриться въ томъ, пряма ли проведенная черта, способа употребляемаго столярами, когда они остругиваютъ прямые ребра доски или линейки?

Способъ этотъ заключается въ слѣдующемъ: мастеровой

приближаетъ глазъ къ одному концу ребра и смотритъ на другой. Если ребро прямое, то оно совмѣщается въ точку — остріе, если же кривое, то это ясно обозначается впадинами и выгибами. Точно также можно узнать прямой ли край бумаги и пряма-ли черта. Натяните каждый свою нитку такъ какъ я натянулъ шнурокъ (такъ, чтобы онъ проходилъ поверхъ пальцевъ, которыми растягивается) и посмотрите на него такъ какъ я сей часъ говорилъ. Теперь точно также посмотрите каждый изъ васъ, на какое-либо прямое ребро.

Посмотрите прямой ли этотъ край этаго куска бумаги, эта черта, этотъ кусокъ проволоки?—Не скажетъ ли кто-нибудь какъ можно узнать вѣрно ли сдѣлана линейка? — Что должно быть прямымъ въ правильно выстроганной линейкѣ?— Какія ребра?

Если у васъ есть вѣрно сдѣланная линейка*) съ прямыми ребрами, то нельзя ли ею воспользоваться для повѣрки прямизны чертъ, краевъ бумаги и пр.?

Кто-нибудь разскажетъ мнѣ какъ можно сдѣлать повѣрку прямизны черты, съ помощію линейки?

Приложите линейку къ этой проволокѣ, ребру, чертѣ, краю и посмотрите прямые ли они? А нельзя ли вѣрно провести прямую черту съ помощію линейки? — Какъ это сдѣлать?

Кто-нибудь изъ васъ проведетъ прямую черту съ помощію линейки на большей доскѣ.

Проведите у себя въ тетради по прямой чертѣ съ помощію линейки.

Какъ удобнѣе проводить прямыя черты по линейкѣ или посредствомъ шнура?

— Короткія черты на бумагѣ или въ тетради удобнѣе проводить по линейкѣ, а длинныя черты, какія нужно бываетъ прочертить пильщикамъ на распиливаемыхъ бревнахъ, плотникамъ на обтесываемыхъ доскахъ и бревнахъ, удобнѣе пробивать шнуромъ, потому что длинную линейку трудно сдѣлать, да съ нею и возиться не легко.

---

*) Нужно имѣть въ классѣ одну или двѣ большія линейки и вообще все употребляющіяся въ дѣло на урокахъ чертежныя пособія въ большомъ видѣ для построеній на классной доскѣ при участіи всего класса.

Нельзя ли эту прямую проволоку или прутъ наставить, удлинить?—Можно ли ее наставить кривою?—Почему нельзя?

— Потому что она тогда уже не будетъ прямою.

— А какою же проволокою ее можно наставить такъ, чтобы она оставалась прямою?—К. выйди къ доскѣ и попытайся наставить выставленную проволоку вотъ этимъ кускомъ прямой проволоки.

— Вѣрно ли К. наставилъ? Почему не вѣрно?

— Потому что проволока вышла ломаною.

— Значитъ недостаточно еще взять прямую проволоку нужно ее умѣть наставить? Какъ же бы это сдѣлать по вѣрнѣе, т. е. такъ, чтобы удлиненная проволока была прямою.

— Это можно сдѣлать посредствомъ натянутаго шнура или линейки.

— А если нѣтъ ни шнура ни линейки?

— Тогда можно такъ: смотрѣть съ одного конца выставленнаго куска на другой конецъ, а новый кусокъ установить такъ, чтобы онъ закрывался первымъ.

Посмотрите я натяну часть этаго шнура, приколовъ концы булавками. Удлините прямую часть шнура къ верху. Еще. Удлините на сколько можно къ низу.

— Если бы доска не мѣшала, то могли бы мы удлинить еще шнуръ?

— Мы могли бы удлинять до тѣхъ поръ покуда шнуръ кончится?

— А если бы мы наставили шнуръ?

— То тогда могли бы продолжать сколько угодно.

— А можно ли продолжать эту черту? — Какъ это сдѣлать?

Проведите въ тетрадяхъ короткую черту, отнимите линейку и за тѣмъ продолжите ее на сколько позволятъ края бумаги.

VI.

Задачи:

1) Поставить точку и вправо отъ нея провести черту.

2) Поставить точку и черезъ нее провести кривую (отъ руки) ломаную и прямую (по линейкѣ) черты.

3) Черезъ поставленную точку провести 2, 3, 4, 5 и т. д. прямыхъ.

4) Поставить точку и отъ нея внизъ провести одну, двѣ, три и т. д. прямыхъ чертъ—стало быть такъ, чтобы верхніе концы прямыхъ упирались въ точку.

5) Провести прямую черту и продолжить ее въ обѣ стороны.

6) Провести прямую и отъ праваго конца ея вверхъ, а отъ лѣваго внизъ провести прямыя черты.

7) Провести прямую черту, отъ одного изъ концевъ ея вверхъ, а отъ другаго внизъ провести по прямой чертѣ и за тѣмъ первую прямую продолжить въ обѣ стороны.

8) Поставить точку, отъ нея провести внизъ двѣ прямыя и продолжить ихъ (обѣ прямыя) вверхъ.

Какъ можно было назвать прямыя до продолженія?

— *Сходящимися.*

— А по продолженіи?

— *Пересѣкающимися.*

9) Провести двѣ пары прямыхъ, изъ которыхъ прямыя, первой пары были бы сходящимися къ одной точкѣ, а прямыя второй пары пересѣкающимися.

10) Провести двѣ пересѣкающіяся и двѣ сходящіяся кривыя и ломаныя черты.

11) Провести прямую, на ней назначить точку, черезъ которую провести прямую пересѣкающую прежде проведенную прямую.

12) Поставить точку, отъ нея провести 2, 3, 4, 5 и т. д. прямыхъ и затѣмъ провести еще одну, двѣ, три и болѣе прямыхъ пересѣкающихъ всѣ прежде проведенныя.

13) На проведенной прямой назначить три точки, черезъ которыя провести прямыя пересѣкающіяся съ первою прямою.

14) На прямой взять точку, и черезъ нее провести 2, 3, 4, 5 и т. д. прямыхъ пересѣкающихъ первую.

15) Провести прямую, внѣ ея взять точку, отъ которой провести нѣсколько прямыхъ, пересѣкающихъ первую.

16) Изъ трехъ точекъ, взятыхъ внѣ прямой провести по три прямыя пересѣкающія первую.

17) Внѣ прямой назначить точку, и отъ нея провести четыре прямыя, изъ которыхъ двѣ доходили бы до первой прямой, а остальныя пересѣкали бы ее.

18) Провести прямую и черезъ концы ея другія двѣ прямыя сходящіяся въ точкѣ, взятой внѣ первой прямой.

19) Провести двѣ пересѣкающіяся прямыя и черезъ концы ихъ провести прямыя попарно сходящіяся въ точки, взятыя внѣ прежде проведенныхъ прямыхъ.

20) Изъ двухъ точекъ провести по три прямыя а изъ третьей еще три пересѣкающія всѣ прежде проведенныя.

Цѣль исполненія учениками этихъ задачъ заключается въ пріобрѣтеніи умѣнія акуратно назначить точку, проводить правильно и отчетливо прямую черту, посредствомъ линейки вѣрно продолжать проведенную черту и располагать проводимыя черты согласно условіямъ въ заданіи.

Одинъ или двое изъ учениковъ класса поочередно исполняютъ эти задачи на большой классной доскѣ, а остальные у себя въ тетрадяхъ или на доскахъ.

Направленіе проводимыхъ прямыхъ, а также и длина ихъ опредѣляется, на этотъ разъ, самими учениками; нужно только наблюдать, чтобы прямыя не были слишкомъ длинными, такъ какъ это влечетъ за собою большую трату бумаги. При исполненіи учениками этихъ и всякихъ другихъ задачъ рѣшающихся построеніемъ необходимо обращать особенное вниманіе на возможную точность и отчетливость чертежа. Для этой цѣли преподаватель долженъ наблюдать а) чтобы карандашъ у дѣтей былъ не мягкій и очиненъ остро, б) чтобы линейка при проведеніи черты прижималась неподвижно къ тетради или доскѣ, в) чтобы карандашъ, при проведеніи черты, двигался остріемъ у самаго ребра линейки *).

Нужно наблюдать также, чтобы ученики держали тетради прямо, неворочая ихъ въ стороны, что въ особенности важно для правильнаго проведенія отвѣсныхъ и горизонтальныхъ прямыхъ.

Задачи дурно исполненныя въ классѣ передѣлываются въ классѣ же, или же вновь задаются какъ внѣклассныя упражненія. Нѣкоторыя болѣе простыя изъ приведенныхъ задачъ исполняются учениками при помощи нитви, натертой мѣломъ

*) Здѣсь прійдется показать ученикамъ на дѣлѣ какъ держать карандашъ, прижимать линейку и т. д. и затѣмъ по чаще поправлять самому или съ помощію лучшихъ учениковъ класса.

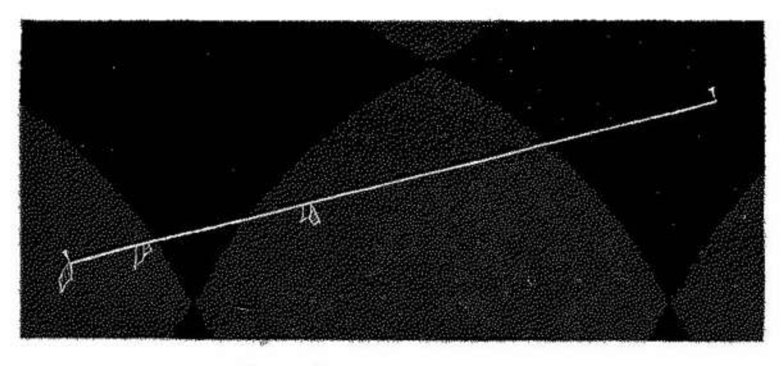
или углемъ на большой классной доскѣ, на полу, на стѣнахъ и т. д.

Еслибы представилась возможность, то полезно продѣлать нѣкоторыя изъ предложенныхъ задачъ на дворѣ или въ полѣ при помощи шнурка или веревки; здѣсь уже прямыя борозды придется проводить по натянутому шнуру заостренною палкой.

VII.

20) Натяните на доскѣ нитку, затѣмъ другую такъ, чтобы она проходила черезъ двѣ точки, назначенныя на первой. Ф и В сдѣлаютъ заданное

Чтобы вамъ виднѣе было я навѣсилъ на первую натянутую



мною нитку, въ тѣхъ мѣстахъ гдѣ назначены точки, кусочки бумаги.

Сколько натянуто нитокъ?—Видите ли вы отдѣльно каждую изъ нихъ?—Какъ бы вы нарисовали эти двѣ нитки?

— Одною чертою.

— Нельзя ли натянуть нитку такъ, чтобы она не прилегала къ другой, не сливалась съ нею въ одну? А нельзя ли назначить другія точки на прямой, черезъ которыя можно было бы провести другую прямую не сливающуюся съ первой?

К. Передвинь бумажки подальше отъ того мѣста, гдѣ онѣ

были, а кто нибудь изъ васъ попытается протянуть черезъ нихъ прямую нить такъ, чтобы она не сливалась съ первой.

Если бы мы продолжили прямую какъ угодно далеко и на продолженіи взяли бы двѣ точки, то могли бы ли тамъ провести черезъ нихъ другую прямую несливающуюся съ первой?

22) Къ двумъ точкамъ на прямой проволокѣ приложить кривую проволоку или кривой край такъ, чтобы кривая не прилегала къ прямой—не сливалась съ нею.

23) Къ двумъ точкамъ, назначеннымъ на кривой приложить кривую или прямую такъ, чтобы послѣдняя не сливалась съ первою.

24) Къ двумъ точкамъ, назначеннымъ на ломаной приложить прямую, кривую или ломаную же такъ, чтобы они не сливались съ первою.

25) Поставить двѣ точки и черезъ нихъ провести кривую и ломаную черты.

26) Поставить двѣ точки и провести черезъ нихъ прямую черту.

27) Проведите прямую черту, на ней назначте двѣ точки и черезъ нихъ проведите другую прямую черту.

У кого другая черта вышла не сливающейся съ прежде проведенной? Не можетъ ли кто провести *черезъ двѣ точки на прямой другую прямую черту не сливающуюся съ первой?*

28) Проведите кривую и ломаную, назначте на каждой изъ нихъ по двѣ точки и черезъ нихъ проведите прямую.

29) Поставте точку, подъ нею другую и вправо третью и черезъ нихъ проведите прямую черту.

Кому удалось рѣшить задачу?

30) Черезъ эти же три точки проведите кривую и ломаную.

Нельзя ли поставить три точки такъ, чтобы черезъ нихъ можно было провести прямую?

31) Поставить три точки такъ, чтобы черезъ нихъ можно было провести прямую черту.

Какъ вы это сдѣлаете?

Можно ли прямую черту провести черезъ одну точку какъ бы она ни была поставлена? А кривую? А ломаную?

Можно ли черезъ двѣ точки, какъ бы онѣ ни были поставлены провести прямую черту? А кривую, а ломаную?

Можно ли черезъ три точки, какъ бы ни были онѣ поставлены провести прямую? А кривую, а ломаную?

Нужно ли какъ нибудь особенно ставить двѣ точки, чтобы

черезъ нихъ можно было провести прямую черту?—А черезъ три точки всегда ли можно провести прямую черту?—А кривую?

32) Провести черезъ три точки кривую и ломаную черты.

И такъ, *прямую черту можно всегда провести черезъ двѣ точки, какъ бы эти точки ни были поставлены, а черезъ три можно п оовести только тогда, когда онѣ стоятъ въ прямомъ направлении. Кривую же можно провести и черезъ три точки какъ бы онѣ не были поставлены* *).

Можно ли провести прямую черту черезъ четыре, пять, шесть и т. д. точекъ, какъ бы онѣ не были выставлены? А кривую?

Какъ должны быть выставлены точки, чтобы черезъ нихъ можно было провести прямую черту?

33) Выставить 4, 5, 6 и т. д. точекъ въ прямомъ направленіи.

Если взять на прямой нѣсколько точекъ (болѣе двухъ) то можно ли провести черезъ нихъ отдѣльную прямую черту? А кривую или ломаную?

34) Провести рядъ прямыхъ такъ, чтобы черезъ верхніе ихъ концы можно было провести прямую линію.

35) Поставить точку и отъ нея провести нѣсколько прямыхъ чертъ, черезъ концы которыхъ можно было бы провести прямую линію.

Если выставлены двѣ или рядъ точекъ въ прямомъ направленіи, то можно ли показать пальцемъ или указкой какъ пройдетъ прямая черта черезъ нихъ проведенная? А кривая черта опредѣляется ли рядомъ точекъ? — А если поставлена только одна точка, то опредѣлено ли направленіе прямой черты?—Почему не опредѣлено? Сколько прямыхъ чертъ можно провести черезъ одну точку?—А черезъ двѣ?

Когда землекопы хотятъ рыть ровъ или канаву, а каменьщики строить стѣну въ прямомъ направленіи, то проводятъ ли они на землѣ черту—кто изъ васъ видалъ?

Если вбить на мѣстности рядъ колышковъ въ прямомъ направленіи, то замѣнитъ ли это прямую черту или борозду?— А если бы землекопъ вбилъ только одинъ колышекъ, то зналъ ли бы онъ гдѣ ему рыть ровъ въ прямомъ направленіи? — А если бы онъ вбилъ два кола? — Такъ зачѣмъ же вмѣсто

---

*) Это и всѣ другія опредѣленія не сообщаются преподавателемъ но составляются учениками.

двухъ кольевъ они (землекопы) вбиваютъ нѣсколько?—А какъ разставляютъ землекопы рядъ кольевъ замѣняющій имъ черту? (по шнуру).

36) Обозначить прямую черту рядомъ точекъ.

37) Провести прямую черту и поставить точку, черезъ которую бы прошла черта по продолженіи.

38) Провести короткую прямую черту и обозначить продолженіе ея рядомъ точекъ съ обѣихъ сторонъ.

39) Поставить точку и обозначить точками двѣ, три, четыре и т. д. черты выходящія изъ поставленной точки.

40) Обозначить двѣ пересѣкающіяся прямыя черты рядомъ точекъ.

41) Провести прямую черту; посрединѣ поставить точку и отъ нея вверхъ провести прямую черту и затѣмъ обозначить продолженіе только что проведенной черты внизъ рядомъ точекъ.

42) Поставить точку; въ право, другую; соединить ихъ прямою чертою; вверху черты поставить третью точку, а съ верху третьей четвертую и двѣ послѣднія точки соединить прямою чертою, и затѣмъ назначить на нижней прямой точку, гдѣ пересѣкла бы ее верхняя по продолженіи.

43) Провести двѣ прямыя черты, которыя по продолженіи могли бы встрѣтиться и назначить точку ихъ встрѣчи.

44) Отъ точки провести нѣсколько чертъ въ низъ; съ лѣвой стороны провести прямую черту, которая по продолженіи пересѣкала бы всѣ раньше проведенныя черты и назначить точки пересѣченія.

Цѣль исполненія учениками этихъ задачъ заключается: а) въ усвоеніи понятія, что прямая линія (черта) опредѣляется двумя точками; б) умѣнія вообразить прямую черту между двумя точками и обозначенную рядомъ точекъ и в) въ пребрѣтеніи навыка обозначать прямую рядомъ точекъ и двумя точками.

При исполненіи задачъ соблюдаются тѣ же условія, которыя были указаны въ связи съ первой группой задачъ.

Поставте отъ руки, безъ помощи линейки рядъ точекъ, въ прямомъ направленіи т. е. такъ, чтобы черезъ всѣ эти точки могла бы быть проведена прямая черта. — Какъ повѣрить такъ ли вы поставили какъ слѣдуетъ?

Но если бы у васъ не нашлось подъ руками линейки и нитки или же рядъ точекъ былъ бы слишкомъ великъ для того чтобы къ нему могла быть приложена линейка или нитка — то

какъ тогда повѣрить работу?—Вспомните, какъ мы повѣряли линейку или лучше какъ узнавали пряма ли черта или ребро? Если посмотрѣть на поставленный вами рядъ точекъ, какъ смотрѣли на ребро линейки, то что мы должны увидѣть, если точки разставлены въ прямомъ направленіи?

Еслибы, вмѣсто точекъ вы разставляли булавки въ прямомъ направленіи, то какъ бы вы повѣрили себя, если бы исполнили это безъ помощи линейки или нитки?

Нельзя ли вѣрно разставить рядъ булавокъ или кольевъ на дворѣ въ прямомъ направленіи, не прибѣгая къ линейкѣ и шнуру? Разскажите, какъ это сдѣлать?

— Сперва ставятся два кола, затѣмъ одинъ изъ рабочихъ стоитъ у перваго кола и смотритъ черезъ него на второй колъ, а другой рабочій отходитъ на должное разстояніе и ставитъ третій колъ такъ, чтобы онъ закрывался первыми двумя. При этомъ первый рабочій словами или знаками указываетъ въ право или въ лѣво надо подвинуть третій колъ, чтобы онъ закрывался первыми двумя. Далѣе такимъ образомъ ставится четвертый, пятый и сколько угодно кольевъ. Такъ въ дѣйствительности ставятся въ прямомъ направленіи рядъ кольевъ на мѣстности, если имѣютъ въ виду вырыть длинный ровъ или построить заборъ въ прямомъ направленіи. На этой доскѣ мы установимъ въ прямомъ направленіи рядъ булавокъ только что указаннымъ способомъ.

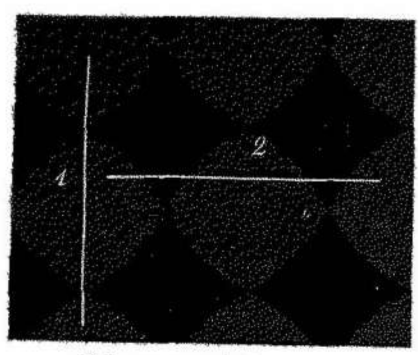
Нѣсколько учениковъ, подходятъ къ доскѣ, по двое, устанавливаютъ ряды булавокъ въ прямомъ направленіи, при чемъ исполняются нѣкоторыя подходящія изъ приведенныхъ выше задачъ.

Хорошо, если преподаватель поупражняетъ дѣтей въ разбиваніи прямыхъ линій кольями на дворѣ или въ полѣ. Это не только оживитъ занятіе, но и послужитъ полному уясненію пріема разбивки прямыхъ и болѣе отчетливому пониманію свойствъ прямой линіи.

VIII.

Преподаватель вычерчиваетъ на доскѣ двѣ прямыя одина-

ковой длины, изъ которыхъ одна въ отвѣсномъ положенiи, а другая въ горизонтальномъ и спрашиваетъ:



— Какія это черты?

— Прямыя.

— Одинаковы ли онѣ? Чѣмъ отличается первая черта отъ второй?

— Одна идетъ съ низу въ верхъ, а другая идетъ съ лѣва на право.

— Кто покажетъ какой конецъ 2-й черты выше, и какой ниже.

— Оба конца 2-й черты находятся на одинаковой высотѣ и ни одинъ изъ нихъ не выше другаго.

— А какой конецъ 2-й черты лѣвѣе другаго? В покажи какой конецъ лѣвый, а какой правый у 2-й прямой.—Покажите какой изъ двухъ концевъ 1-й прямой лѣвѣе?

— Ни одинъ изъ нихъ ни лѣвѣе ни правѣе?

— Не знаетъ ли кто изъ васъ какъ называются прямыя, имѣющія такое положенiе какъ 1-я?—Видѣли ли вы плотничій отвѣсъ? Въ какомъ положенiи стоитъ нить отвѣса?—Который изъ ея концевъ насходится правѣе, а который лѣвѣе?

Всѣ прямыя, у которыхъ ни одинъ изъ концевъ не выступаетъ ни въ лѣво ни въ право называются *отвѣсными* потому что они находятся въ такомъ же положенiи какъ нить отвѣса?

А какъ называется 2-я прямая, у которой оба конца находятся на одной и той же высотѣ?

Эту прямую мы будемъ называть *горизонтальною.*

Если продолжить отвѣсную прямую вверхъ и внизъ, то не выйдетъ ли одинъ изъ ея концовъ вправо относительно другаго?—А если продолжить горизонтальную черту, то не будетъ ли одинъ изъ ея концевъ выше другаго?

Б установитъ эту проволоку на доскѣ такъ, чтобы она была въ отвѣсномъ положенiи, а всѣ остальные смотрите вѣрно ли онъ сдѣлаетъ что задано.

В установитъ проволоку въ горизонтальномъ положенiи.

45) Нарисуйте у себя въ тетрадяхъ двѣ установленныя проволоки. Кому удалось вѣрно исполнить задачу? *)

46) Назначте отвѣсную черту рядомъ точекъ.

Которая изъ поставленныхъ вами точекъ правѣе остальныхъ?—Попытайтесь обозначить отвѣсную рядомъ точекъ такъ, чтобы нѣкоторыя изъ нихъ были правѣе или лѣвѣе остальныхъ. Кому удалось это сдѣлать.—Значитъ—ни одна изъ точекъ, которыми обозначается отвѣсная, а равно и точекъ, назначенныхъ на отвѣсной не можетъ быть ни правѣе ни лѣвѣе?

47) Назначте горизонтальную черту рядомъ точекъ.

Не выходитъ ли которая нибудь изъ нихъ выше или ниже остальныхъ?

Проведите горизонтальную черту, назначте на ней нѣсколько точекъ и посмотрите которая изъ нихъ правѣе или лѣвѣе концевъ прямой или остальныхъ точекъ?

Прямыя неотвѣсныя и негоризонтальныя, у которыхъ одинъ изъ концевъ лѣвѣе или правѣе и выше другаго называются *наклонными*. Изъ нихъ тѣ, у которыхъ верхній конецъ правѣе нижняго называются *наклонными вправо*, а тѣ, у которыхъ верхній конецъ лѣвѣе нижняго называются *наклонными влѣво*.

48) Проведите или обозначте точками наклонную вправо и наклонную влѣво.

49) Поставте точку и отъ нея проведите отвѣсную, горизонтальную, наклонную вправо и наклонную влѣво.

50) Поставте точку и отъ нея проведите нѣсколько наклонныхъ, отвѣсныхъ и горизонтальныхъ.

Сколько отвѣсныхъ и горизонтальныхъ можно провести отъ одной точки? А наклонныхъ вправо и наклонныхъ влѣво?

51) Поставте двѣ точки, изъ которыхъ одна была бы выше и правѣе другой и проведите черезъ нихъ отвѣсную, горизонтальную, наклонную вправо и наклонную влѣво.

---

*) Такъ какъ проведеніе горизонтальной и отвѣсной дѣлается учениками на глазъ, то необходимо дать имъ побольше упражненій въ возможно болѣе вѣрномъ проведеніи ихъ; здѣсь большую помощь можетъ оказать преподаватель рисованія, но, независимо отъ этого, и преподавателю геометріи прійдется давать простенькіе рисунки, составляющіяся изъ отвѣсныхъ и горизонтальныхъ чертъ и въ классѣ и на домъ.

Можно ли черезъ эти двѣ точки провести отвѣсную? А горизонтальную? А наклонную вправо? А наклонную влѣво *)?

Можно ли такъ поставить двѣ точки, чтобы черезъ нихъ можно было провести отвѣсную, горизонтальную, наклонную вправо и наклонную влѣво?

51) Поставте двѣ точки такъ, чтобы черезъ нихъ можно было провести отвѣсную, горизонтальную, наклонную вправо и наклонную влѣво.

Дѣлая поправки ошибокъ при проведеніи учениками отвѣсной, горизонтальнои, наклонной вправо и наклонной влѣво, преподаватель обращаетъ вниманіе учениковъ на относительное положеніе концевъ прямой.

Посмотрите сюда, я поставлю на доскѣ двѣ точки.—Скажите какая изъ нихъ выше?—Не ошибаетесь ли вы? Незнаетъ ли кто, какъ можно доказать что правая точка дѣйствительно выше лѣвой?—Если черезъ низшую точку провести горизонтальную черту, то какъ пройдетъ она относительно высшей точки: въ верху, или въ низу?—А если провести горизонтальную же черту черезъ высшую точку?

Такъ, какъ узнать, которая изъ поставленныхъ точекъ выше?

Если не видно съ разу, которая изъ точекъ правѣе, то какъ можно узнать это?

Если черезъ точку находящуюся правѣе провести отвѣсную, то гдѣ она пройдетъ: черезъ вторую точку или правѣе, или лѣвѣе этой точки?

Такъ, какъ же узнать, которая изъ поставленныхъ мною на доскѣ точекъ поставлена правѣе?

Задачи:

53) Поставить точку, правѣе ея провести отвѣсную черту и назначить гдѣ пересѣкла бы ее горизонтальная черта, проведенная черезъ точку.

Насколько верхній конецъ отвѣсной выше точки? **) — Насколько нижній конецъ отвѣсной ниже точки?—Насколько

---

*) Тоже самое повторяется при другомъ расположеніи точекъ.

**) Это опредѣляется длиной отвѣсной—отъ верхняго конца до точки пересѣченія ея съ горизонтальною проведенною черезъ точку.

точка выше нижняго конца отвѣсной?—На сколько она ниже верхняго конца отвѣсной?

54) Поставить точку, вверху провести горизонтальную черту и назначить гдѣ пересѣкла бы послѣднюю отвѣсная черта, проведенная через точку.

Насколько точка правѣе лѣваго конца горизонтальной?— Насколько она лѣвѣе праваго конца горизонтальной?

Насколько правый конецъ горизонтальной правѣе, а лѣвый лѣвѣе точки?

55) Провести двѣ горизонтальныя черты и показать на сколько лѣвый конецъ верхней правѣе или лѣвѣе лѣваго же конца нижней, а правый конецъ нижней правѣе или лѣвѣе праваго же конца верхней.

56) Провести двѣ отвѣсныя или отвѣсную и наклонную вправо или наклонную вправо и наклонную влѣво и показать — который изъ верхнихъ концовъ, и на сколько выше, и который изъ нижнихъ концовъ ниже.

IX.

Учитель проводитъ нѣсколько прямыхъ чертъ, одинаковыхъ по положенію напр. отвѣсныхъ, но различныхъ по длинѣ и спрашиваетъ:

Какія это черты?

— Прямыя и отвѣсныя.

— Стало быть одинаковыя? Ну, а чѣмъ же онѣ различаются?

Какая изъ нихъ *длиннѣе* всѣхъ, а какая *короче* всѣхъ?

Самая длинная и короткая стираются и тотъ же вопросъ повторяется относительно остальныхъ *).

---

*) Здѣсь полезно, въ отвращеніе задрудненій на будущее время, показать ученикамъ, что прямая линія одной и той же длины можетъ казаться намъ болѣе или менѣе длинною, въ зависимости отъ того какъ мы смотримъ на нее: имѣя ее прямо передъ собой, при ровныхъ разстояніяхъ глаза отъ концевъ (это показывается на дѣлѣ), или же съ боку и объясняется, что въ геометріи всегда нужно разсматривать линію такъ какъ она кажется въ первомъ случаѣ.

Учитель снова чертитъ рядъ горизонтальныхъ, различныхъ по длинѣ и спрашиваетъ: какая изъ нихъ самая длинная, какую можно назвать *второю, третьею, четвертою* и т. д. по длинѣ?

Разставте нумера у каждой изъ проведенныхъ чертъ начиная съ самой длинной и кончая самой короткой.

Тоже самое продѣлывается и относительно ряда прямыхъ чертъ, проведенныхъ въ различныхъ положеніяхъ.

57) Провести двѣ черты, изъ которыхъ одна, верхняя была бы больше другой, нижней.

58) Провести рядъ чертъ, изъ которыхъ 1-я была бы больше второй, вторая третьей и т. д.

59) Провести двѣ пересѣкающіяся прямыя, изъ которыхъ одна была бы больше другой.

Преподаватель утверждаетъ на классной доскѣ рядъ натянутыхъ шнуровъ или прямыхъ проволокъ, изъ которыхъ нѣкоторыя равны между собою и предлагаетъ ученикамъ указать на большую, изъ нихъ и меньшую; затѣмъ указанныя проволоки снимаетъ и предлагаетъ дѣтямъ опять выдѣлить большую и меньшую, и такимъ путемъ доходитъ до равныхъ по длинѣ прямыхъ проволокъ, которыя уже нельзя выдѣлить.

Различаются ли эти проволоки по длинѣ?—А не ошибаетесь ли вы?—Незнаетели вы какимъ способомъ можно въ этомъ убѣдиться?

— *Для этаго нужно сложить одну проволоку съ другою, сравнять концы съ одной стороны и затѣмъ посмотрѣть сошлись ли концы проволокъ съ другой стороны. Если сошлись — значитъ проволоки равны по длинѣ, если нѣтъ-то — неравны.*

— А если неравны, то какая изъ нихъ больше?

— *Та, которой конецъ выходитъ за конецъ другой проволоки.*

— Ну а если бы вмѣсто проволоки были шнурки, то какъ тогда узнать равны ли они?

Какъ провести черту длиною равную этой проволокѣ?—А длиною равную этому шнурку?

— *Нужно снять длину проволоки ниткой, бумажкой или циркулемъ* *), *затѣмъ провести черту, по ней отло-*

*) Здѣсь нужно показать ученикамъ циркуль, объяснить его устройство и показать употребленіе Если можно каждому изъ учениковъ раздать по циркулю, тогда хорошо, если они имъ будутъ снимать и откладывать длины прямыхъ.

жить, снятую на нитку, бумагу или циркуль черту, а остальную часть проведенной черты стереть.

60) Провести отвѣсную черту по длинѣ равную *a*.

61) Провести отвѣсную же черту большую *a*.

62) Провести наклонную влѣво меньшую *a*.

63) Провести наклонную вправо черту равную по длинѣ верхнему краю листка тетради; провести другую черту большую или меньшую по длинѣ этого края.

64) Провести прямую черту равную по длинѣ обыкновенной спичкѣ, иголкѣ и т. д., и затѣмъ черты большую и меньшую спички, булавки и т. д.

65) Провести прямую черту, наклонную влѣво длиною равную длинѣ обыкновенной иголки и затѣмъ продолжить черту на ея длину въ обѣ стороны.

X.

Учитель чертитъ двѣ черты, изъ которыхъ одна прямая а другая кривая или ломаная и спрашиваетъ: которая изъ нихъ длиннѣе?

Какъ повѣрить—вѣрно вы сказали?

Посредствомъ нитки, накладывая ее сначала на кривую по всѣмъ изгибамъ, а потомъ, натянувъ и на прямую. Затѣмъ учитель предлагаетъ ученикамъ сдѣлать рядъ сравненій по длинѣ кривыхъ съ прямыми при помощи шнурка или нитки и задаетъ рядъ задачъ въ родѣ слѣдующихъ:

66) Провести прямую и кривую черты, изъ которыхъ первая была бы больше или меньше второй.

67) Провести ломаную и кривую черты, изъ которыхъ первая была бы больше или меньше второй.

68) Провести прямую, кривую и ломаную черты, изъ которыхъ вторая была бы меньше первой и больше второй.

69) Поставить точку и отъ нея провести кривую, ломаную и прямую, изъ которыхъ прямая была бы больше ломаной и кривой.

70) Поставить двѣ точки и отъ одной изъ нихъ къ дру-

гой провести прямую, кривую и ломаную, изъ которыхъ прямая была бы больше кривой и ломаной.

Кто сдѣлалъ эту задачу?—Попытайтесь еще разъ провести означенныя черты—неудается ли сдѣлать такъ, чтобы прямая была больше и длиннѣе ломаной и кривой. А нельзя ли отъ этаго конца ребра доски къ этому концу ребра стола протянуть натянутый т. е. прямой шнуръ, который былъ бы длиннѣе шнура протянутаго между этими же точками, но не натянутаго?—Попытайтесь это сдѣлать.

Стало быть, если мы проведемъ отъ одной точки къ другой прямую, кривую, и ломаную, то первая всегда *короче* остальныхъ.

Учитель ставитъ нѣсколько паръ точекъ въ какомъ-нибудь опредѣленномъ (горизонтальномъ направленіи) и спрашиваетъ: сколько паръ точекъ я поставилъ на доскѣ?—Посмотрите внимательно чѣмъ одна изъ этихъ паръ отличается отъ другихъ.

— Точки одной пары стоятъ ближе другъ къ другу, а другихъ дальше другъ отъ друга.

Точки которой пары дальше другъ отъ друга чѣмъ точки остальныхъ паръ?—А точки которой пары ближе другъ къ другу? Какъ убѣдиться такъ ли это на самомъ дѣлѣ какъ вы говорите?—Что нужно узнать?

— Отстояніе или *разстояніе*.

— Какъ снимается разстояніе между точками?—Какимъ шнуромъ—натянутымъ или ослабленнымъ? — Нельзя ли снять другимъ чѣмъ?

— Можно, прямой линейкой.

— Если бы разстояніе между ними снять кривою ниткою или проволокою, то можно было бы по этому судить какія точки дальше одна отъ другой? Если снять разстоянія между выставленными парами точекъ прямымъ шнуромъ или линейкой, то разстояніе между равно-удаленными другъ отъ друга точками окажутся какими?

— Равными.

— А если вы будете снимать кривыми шнурами, прутомъ и т. д. то тогда какъ?

— Тогда могутъ выйти и неравныя п. ч. разстояніе, которое мы будемъ мѣрить будетъ больше, если мы возьмемъ болѣе изогнутую часть кривой проволоки, или когда мы

больше ослабимъ шнуръ и менѣе, когда мы возьмемъ менѣе изогнутую часть проволоки и менѣе ослабимъ шнуръ.

— Стало быть, разстояніе между двумя точками нужно снимать по прямому направленію. А когда разстояніе выйдетъ меньше: тогда ли когда мы его снимаемъ по прямому направленію или—по кривому?

— Тогда, когда снимаемъ разстояніе по прямому направленію.

— Отъ чего?

— Отъ того что изъ всѣхъ чертъ какія можно провести отъ одной точки къ другой самая короткая *прямая*.

71) Поставить пять паръ точекъ, изъ которыхъ разстоянія между точками трехъ паръ были бы равными, между точками четвертой пары больше первыхъ, а между точками пятой пары меньше первыхъ трехъ.

XI.

Если этотъ кусокъ проволоки мы приложимъ къ какому либо другому куску проволоки же или натянутому шнуру такъ, чтобы они вмѣстѣ составляли собою прямую, то какова будетъ длина этой прямой?

Если такъ сложены, положимъ, спичка, и иголка?

— Длина будетъ равною длинѣ иголки вмѣстѣ съ длиною спички.

Если бы прямая была сложена изъ трехъ, четырехъ и болѣе частей, то чему бы равнялась длина ея?

— Суммѣ всѣхъ прямыхъ, изъ которыхъ она сложена.

Сложите одну прямую изъ этихъ трехъ проволокъ.

Сдѣлайте тоже изъ этаго края доски, этаго шнура и какого нибудь изъ кусковъ проволоки.

72) Изъ двухъ данныхъ чертъ составить горизонтальную прямую черту равную ихъ суммѣ.

Какъ вы исполните эту задачу?

— Проведемъ по линейкѣ прямую черту, снимемъ на по-

лоскѣ бумаги длину первой черты и отложимъ ее по проведенной чертѣ отъ одного изъ концевъ ея, затѣмъ снявъ длину второй черты, отложимъ ее отъ конца уже отложенной прямой и оставшуюся часть сотремъ.

73) Изъ трехъ данныхъ чертъ составить наклонную влѣво прямую черту равную ихъ суммѣ.

74) Изъ четырехъ данныхъ чертъ составить двѣ наклонныхъ вправо черты, изъ которыхъ первая была бы равна суммѣ первыхъ двухъ, а вторая—суммѣ послѣднихъ.

75) Изъ трехъ чертъ составить двѣ отвѣсныхъ прямыхъ черты, изъ которыхъ первая была бы равна суммѣ первой и второй, а вторая суммѣ второй и третьей.

76) Составить прямую горизонтальную черту равную суммѣ трехъ чертъ, изъ которыхъ 1-я была бы равна по длинѣ булавкѣ, 2-я стальному перу и третья одному изъ реберъ на вашей резинки.

Ну а если хотятъ сдѣлать палку равную по длинѣ суммѣ нѣсколькихъ прямыхъ чертъ, палокъ, проволокъ и т. д., то какъ тогда поступаютъ?

— Здѣсь можно поступить двоякимъ образомъ: или выстрогать длинную палку и отложить по ней послѣдовательно длины прямыхъ, и затѣмъ оставшійся конецъ огрѣзать; или же сначала провести на полу или на доскѣ прямую черту, равную суммѣ данныхъ прямыхъ и затѣмъ, выстрогавъ палку обрѣзать ее такъ, чтобы она была равною по длинѣ проведенной чертѣ.

Въ внѣклассное время ученики продѣлываютъ задачи указаннаго характера на дворѣ, въ полѣ и т. д., проводя борозды равныя по длинѣ суммѣ нѣсколькихъ веревокъ, палокъ бороздъ, вырѣзывая жерди, прутья равныя по длинѣ суммѣ нѣсколькихъ бороздъ, прутьевъ и т. д.

79) Составить горизонтальную прямую черту равную по длинѣ суммѣ трехъ данныхъ равныхъ прямыхъ.

Разскажите какъ вы сдѣлали эту задачу?—Нельзя ли было бы сдѣлать эту задачу иначе?

75) Можно было бы провести прямую равную, одной изъ данныхъ и затѣмъ продолжить эту черту въ обѣ стороны на ея длину.

Подумайте нельзя ли было бы иначе задать эту задачу?— Вы вѣдь помните, что всѣ три черты равны по длинѣ?

— Можно было бы дать, вмѣсто трехъ чертъ, одну и задать провести черту вмѣщающую въ себѣ три раза данную черту, или черту въ три раза большую данной.

78) Провести наклонную вправо равняющуюся по длинѣ два раза взятой данной чертѣ.

79) Провести горизонтальную прямую черту по длинѣ равную три раза взятой суммѣ двухъ данныхъ чертъ.

80) Провести отвѣсную черту равную по длинѣ четыре раза взятому ребру резинки.

Такія же задачи продѣлываются и на дворѣ, въ полѣ на обозначеніи разнаго рода прямыхъ, подобно тому какъ это выше указано по поводу задачъ на сложеніе.

Преподаватель выставляетъ двѣ неравныя проволоки и спрашиваетъ:

Равны ли по длинѣ эти проволоки? —Какая изъ нихъ большая и какая меньшая?

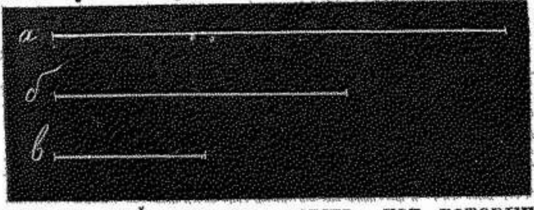
Если лѣвую т. е. меньшую наложить на правую т. е. большую такъ, чтобы нижніе концы ихъ сходились, то покроетъ ли меньшая проволока всю большую, или же отъ послѣдней останется и непокрытая часть?—Если эту непокрытую часть мы отрѣжемъ, то большая проволока раздѣлится на сколько частей?—Изъ этихъ двухъ частей нѣтъ ли равной по длинѣ съ меньшей проволокой?—Какая же это часть—большая или меньшая?

Что показываетъ остатокъ большей, когда отъ нея отдѣлили часть равную меньшей.

— *Остатокъ показываетъ на сколько большая проволока больше меньшей или же показываетъ разность между большею и меньшею проволоками.*

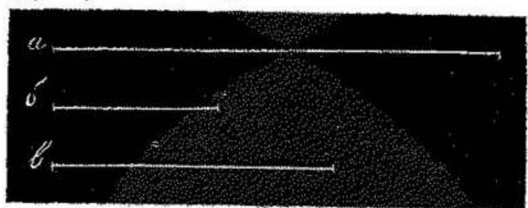
81) Провести прямую черту равную разности двухъ данныхъ.

82) Провести прямую черту равную разности черты *а* и черты равной суммѣ чертъ *б* и *в*.

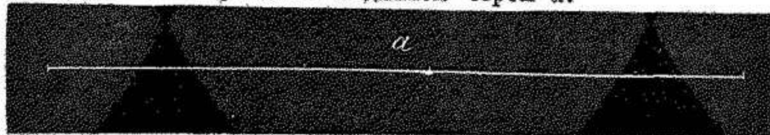


83) Провести двѣ прямыя черты, изъ которыхъ первая

равнялась бы разности между чертами *а* и *б*, а вторая разности между чертами *а* и *в*.



84) Провести прямую черту равную по длинѣ разности между длиною карандаша и длиною черты *а*.



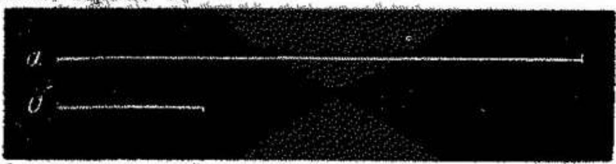
Какъ будете вы рѣшать такую задачу?

— Эту задачу можно рѣшать двояко: 1) снять на бумажную полоску длину карандаша, провести въ тетради прямую черту равную по длинѣ карандашу, отложить по проведенной чертѣ—черту *а*, снявъ ея предварительно на полоскѣ бумаги и затѣмъ стереть часть, которую заняла длина черты *а*; остатокъ будетъ требуемою разностью; 2) Отложить на карандашѣ длину черты *а*, снявъ ее предварительно на мѣрочкѣ и затѣмъ снявъ на мѣрку остатокъ длины карандаша, провести черту равную этому остатку.

Сдѣлайте заданную задачу обоими способами.

85) Провести отвѣсную черту по длинѣ равную суммѣ: черты *а* вмѣстѣ съ разностью между двумя сходящимися ребрами резинки.

86) Провести наклонную влѣво черту по длинѣ равную разности между чертою *а* и три раза взятою чертою *б*.



Такія же задачи рѣшаются на дворѣ и въ полѣ.

XII.

Если эту палочку разломать или разрѣзать въ этомъ, одномъ мѣстѣ, то вмѣсто одной палочки сколько будетъ?

Если ее разломать въ нѣсколькихъ мѣстахъ: двухъ, трехъ, четырехъ и т. д., то сколько тогда будетъ палочекъ вмѣсто одной?

Если какая нибудь палочка, хлѣбъ, пирогъ и т. д. разламывается на нѣсколько кусочковъ, то какъ эти кусочки называются?

Частями цѣлой палочки, цѣлаго хлѣба и т. д.

Что больше—цѣлая палочка или *часть* палочки?

— Смотрите, я поставлю на этой проволокѣ три черточки въ трехъ мѣстахъ; еслибы по этимъ черточкамъ, въ этихъ мѣстахъ разломать или разрѣзать проволоку, то сколько было бы частей? — Ну, а если я поставлю двѣ черточки на этомъ ребрѣ доски, то насколько частей оно раздѣляется, если бы мы по этимъ черточкамъ отдѣлили кусочки ребра?

Теперь, если па какой нибудь прямой выставлено будетъ нѣсколько черточекъ, которыми, (если разрѣзать ее) она раздѣлится на нѣсколько частей — то мы будемъ считать эту прямую дѣйствительно раздѣленною т. е. будемъ считать что черточки отдѣляютъ части одна отъ другой. Если мы захотѣли бы прямую черту раздѣлить на части, то намъ стоитъ только выставить на ней нѣсколько черточекъ. Чтобы черта раздѣлилась на двѣ части, сколько нужно поставить черточекъ?—На три—сколько?—На четыре?—На пять? и т. д.

Не можетъ ли кто сказать, какъ можно сразу угадать сколько нужно поставить черточекъ для раздѣленія черты на части по числу частей?—Чѣмъ отличается число частей отъ числа необходимыхъ для раздѣленія черточекъ?

87) Провести пять прямыхъ равныхъ по длинѣ, въ различныхъ положеніяхъ; первую изъ нихъ раздѣлить на двѣ части, вторую — на три, третью—на четыре, четвертую—на пять и пятую—на шесть.

Какъ раздѣлить черту на равныя части?—Въ какомъ разстояніи должны быть одна отъ другой черточки раздѣляющія черту?

88) Проведите прямую черту и попробуйте раздѣлить ее отъ руки на двѣ, на три, на четыре и т. д. частей.

Какъ повѣрить—вѣрно ли вы раздѣлили?—Что нужно сдѣлать?

Повѣрьте теперь свою работу и поднимите руки кто изъ васъ сдѣлалъ вѣрно?

На двѣ части раздѣлили вѣрно немногіе, а на три, на четыре и дальше всѣ раздѣлили не вѣрно, а потому намъ нужно научиться дѣлать это такъ, чтобы уже неошибаться.

Начнемъ съ раздѣленія черты на двѣ части. Не догадается ли кто изъ васъ какъ бы поставить черточку такъ, чтобы обѣ части были совершенно равны?—Не поможетъ ли намъ при этомъ наша полоска бумаги, которою мы снимали длину различныхъ чертъ?

— На полоску бумаги надобно снять длину черты, затѣмъ ту часть полоски, на которой снята черта сложить въ двое такъ, чтобы конецъ полоски пришолся къ точкѣ, которой отдѣляется длина черты; затѣмъ, развернувъ полоску, приложить ее къ чертѣ такъ, чтобы конецъ ея и черточка, отдѣляющая длину черты совпадали съ концами черты; мѣсто сгиба покажетъ гдѣ нужно поставить черточку, чтобы раздѣлить вѣрно черту пополамъ или на двѣ равныя части.

— Не скажетъ ли теперь кто нибудь — какъ раздѣлить черту на 4-ре и 8-мъ частей?

— Для этого нужно раздѣлить черту пополамъ; затѣмъ половины раздѣлить также пополамъ—тогда черта раздѣлится на четыре части; наконецъ четвертыя части — четверти тоже пополамъ — тогда черта раздѣляется на восемь частей.

89) Провести горизонтальную черту равную суммѣ двухъ данныхъ чертъ и раздѣлить ее пополамъ.

90) Провести наклонную влѣво прямую черту равную 3 раза взятой разности между двумя данными чертами и раздѣлить ее на четыре части.

91) Провести отвѣсную черту равную 3 раза взятой половинѣ данной черты и раздѣлить проведенную черту на восемь частей.

— Какъ раздѣлить прямую черту на три части посредствомъ полоски бумаги?

— Нужно снять длину черты на эту полоску и снятую часть сложить втрое такъ, чтобы одинъ изъ згибовъ приходился у конца полоски, а другой у черточки отдѣляющей снатую длину; затѣмъ, выпрямивъ полоску, слѣдуетъ приложить ее къ чертѣ подобно тому какъ это дѣлалось при дѣленіи черты

пополамъ и мѣста сгибовъ покажутъ гдѣ должны быть поставлены двѣ черточки раздѣляющія черту на три части *).

— Какъ раздѣлить прямую черту на 9 частей?

— Нужно сначала раздѣлить ее на три части, а затѣмъ каждую изъ трехъ третьихъ еще на три.

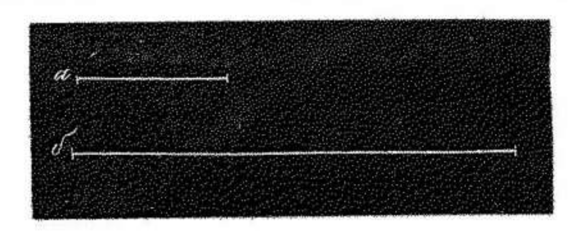
— А какъ раздѣлить черту на 6 частей?

— Нужно сначала раздѣлить черту пополамъ, а затѣмъ каждую половину на три части; или же прежде цѣлую черту на три части и каждую треть пополамъ.

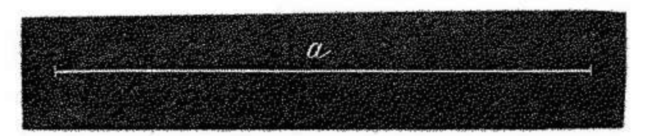
92) Провести наклонную вправо прямую черту и раздѣлить ее на *три* части.

93) Составить прямую горизонтальную черту изъ суммы двухъ данныхъ чертъ вмѣстѣ съ разностью ихъ и раздѣлить эту черту на три части.

94) Провести прямую черту равную три раза взятой *а*, и разности между тою же *а* и *б*, и раздѣлить ее на три части.



95) Провести отвѣсную черту равную разности длины карандаша и черты *а* и раздѣлить ее па *шесть* частей.



96) Провести черту равную половинѣ верхняго края листка тетради и раздѣлить ее на девять частей?

---

*) Этотъ пріемъ можетъ быть недостаточно понятенъ на словахъ, а потому преподавателю необходимо показать его наглядно для всего класса на дѣлѣ и затѣмъ послѣдить нѣкоторое время за усвоеніемъ умѣнія имъ пользоваться, при чемъ можно прибѣгать и къ помощи учениковъ раньше другихъ усвоившихъ себѣ пріемъ.

А какъ бы вы раздѣлили длинную черту, проведенную на полу или на доскѣ, или борозду на землѣ, или наконецъ вотъ этотъ край подоконника на 2, на 3, 4, 6, 8 и 9 частей? Вѣдь полоски бумаги такой длинной и найти трудно?

— Это можно сдѣлать съ помощію шнура или веревки, при чемъ поступать будемъ точно также какъ и при раздѣленіи чертъ съ помощію полоски бумаги т. е. при раздѣленіи пополамъ — складывать вдвое, а при раздѣленіи на три части втрое такъ, чтобы въ первомъ случаѣ концы отмѣренной части совпадали, а во второмъ каждый изъ концовъ совпадалъ съ однимъ изъ сгибовъ.

— Только тутъ прійдется дѣлать замѣтки на мѣстахъ сгибовъ потому что они не остаются, какъ на бумагѣ. Можно вплетать кусочекъ шнурка на мѣстѣ сгиба или перевязывать его ниткой въ этомъ мѣстѣ.

97) Провести въ тетради черту равную половинѣ боковаго края книги.

98) Провести прямую черту на доскѣ или на полу равную одной трети ребра, образуемаго переднею и боковою стороною шкапа.

99) Провести двѣ пересѣкающіяся между собою черты, изъ которыхъ первая отвѣсная равна одной девятой части, двумъ, тремъ, четыремъ, пяти, шести, семи и восьми девятымъ частямъ верхняго края обложки книги, а другая горизонтальная равна одной, двумъ, тремъ, четыремъ, пяти, шести и семи восьмымъ частямъ боковой обложки книги.

100) Провести наклонную вправо равную одной четвертой части длины верхняго края листа тетради, а отъ средины ея въ верхъ наклонную влѣво равную половинѣ проведенной. Затѣмъ проведенную наклонную влѣво продолжить въ низъ на ея длину.

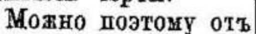
101) Провести отвѣсную равную три раза взятой данной чертѣ, раздѣлить ее на четыре части, черезъ верхнюю черточку провести горизонтальную черту той же длины, но такъ, чтобы одна четверть ея была выпущена въ лѣво, а три чет-

верти въ право и затѣмъ концы: правый—горизонтальной и нижній—отвѣсной соединить прямою *)

Учитель проводитъ двѣ прямыя черты, изъ которыхъ первая въ нѣсколько разъ меньше второй и спрашиваетъ:



Если отъ большей черты *а* мы отнимемъ длину равную меньшей *б*, то остатокъ будетъ больше или меньше меньшей черты?



Можно поэтому отъ остатка еще разъ отнять меньшую прямую? — А можно ли еще?—А еще?

Сколько разъ вы отняли меньшую черту отъ большей? — Осталась ли какая нибудь часть отъ прямой *а*? Стало быть, прямая *б* помѣстилась три раза на прямой *а*, и отъ прямой *а* можно отнять *б* три раза.

Если я проведу здѣсь на доскѣ только одну черту *а*, а другую *б* проведу на другой сторонѣ доски и скажу вамъ что видимая вами черта помѣщается въ той, которую я провелъ на другой сторонѣ доски ровно три раза, то не можете ли вы мнѣ сказать какая изъ чертъ больше: та, которую вы видите здѣсь, или та, которая вамъ невидима? Что нужно прибавить къ меньшей чертѣ, чтобы получилась большая?

— Два раза взятую меньшую черту.

— А неможете ли вы иначе вычерчить большую черту?

— Можно взять три раза меньшую черту.

— *Во сколько разъ* меньшая черта меньше большей?

— Въ три раза.

Сколько разъ половина прямой помѣщается въ цѣлой? А $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{8}$?

Во сколько разъ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$ меньше цѣлой прямой?

Во сколько разъ цѣлая прямая больше $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$ ея части?

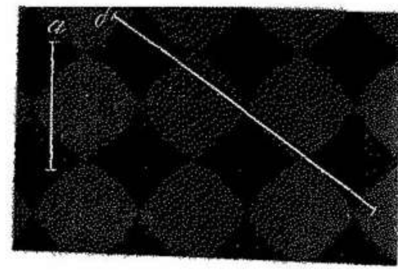
---

*) Эти задачи приводятся съ цѣлію указанія того матеріала, изъ котораго должны составляться задачи даваемыя ученикамъ, а потому они вышли вообще болѣе сложными и трудными чѣмъ должны быть задачи предлагаемыя въ классѣ.

102) Во сколько разъ черта *а* меньше *б* (отвѣтъ письменный).



103) Узнать сколько разъ помѣстится черта *а* по *б*, или во сколько разъ первая меньше второй?



Сколько разъ помѣстилась черта *а* по *б*? Не осталось ли отъ *б* какой нибудь части? Не помѣстится ли на этой части черта а? Если на оставшуюся часть наложить черту *а*, то какуючастьпослѣднейзакроетъ первая?

— Половину.

— Во сколько же разъ черта *а* меньше *б*?

— Въ два съ половиною раза.

104) Сколько разъ одна данная черта помѣстится по другой?

105) Во сколько разъ одна изъ данныхъ чертъ больше другой? Если мнѣ извѣстна меньшая черта и извѣстно что по большей она помѣщается $1\frac{1}{2}$, 2, $3\frac{1}{3}$ и т. д. разъ, то могу ли я вычерчить большую черту? Что мнѣ нужно сдѣлать?

106) Вычертить прямую черту въ $2\frac{1}{2}$ раза большую данной черты.

107) Черты *а*, *б* и *в* увеличить въ $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{4}$ и $4\frac{1}{3}$ разъ.

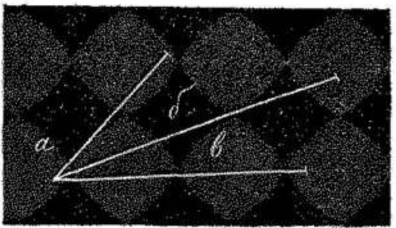
Если извѣстна большая черта и извѣстно во сколько разъ эта черта больше другой—меньшей, то нельзя ли вычертить меньшую? Какъ это сдѣлать?

108) Вычертить прямую въ 2 раза меньшую черты *к*.



109) Три данныя прямыя уменьшить въ 2, 3, 4, 8, 9 разъ.

110) Вычертить прямыя равныя $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$ и т. д. прямыхъ *а*, *б* и *в*.



При рѣшеніи этихъ задачъ обращается вниманіе главнымъ образомъ на длину чертъ; касательно же положенія ихъ наблюдается только, чтобы всѣ онѣ были наклонными вправо или влѣво, горизонтальными или отвѣсными, сообразно тому какъ они даны.

XIII.

Вы теперь знаете какъ можно вѣрно провести прямую черту равную данной, или указанной чертѣ, или вообще прямой; вы можете начертить указанную черту въ уменьшенномъ видѣ: въ два, три, четыре, шесть разъ меньше, въ два, три и т. д. раза больше. Но не всегда можно указать прямую черту, въ нѣсколько разъ меньше или больше которой нужно провести черту. Когда плотнику приходится обозначать кольями прямую, по которой нужно строить заборъ или мостки, не всегда ему показываютъ черту на чертежѣ, которую стоитъ только увеличить въ нѣсколько разъ, то и получится длина забора или мостковъ; иногда, и очень часто, онъ строитъ безъ чертежа. Что же въ такомъ случаѣ ему говорятъ, чтобы опредѣлить длину забора?

— Ему указываютъ мѣсто гдѣ заборъ начинается и гдѣ онъ кончается, или же ему показываютъ начало забора и говорятъ, во сколько саженъ или аршинъ должна быть его длина.

А видали ли вы когда нибудь этотъ аршинъ или сажень?

— Всегда ли онъ имѣетъ одну и ту же длину? Вы знаете, что въ каждой лавкѣ гдѣ продаютъ матеріи и сукна на платья, у каждаго рабочаго есть аршинъ? Одинаковы ли всѣ эти аршины по длинѣ?—Значитъ, если я скажу кому либо изъ васъ,

*

что купилъ себѣ карандашъ въ аршинъ длины, то вы уже знаете, или можете знать, съ помощію вашего аршина, какой длины этотъ карандашъ, и тогда, еслибы я вамъ его и непоказалъ?

Если мы съ вами знаемъ длину аршина или какой нибудь другой мѣры, одинаковой для всѣхъ, то не можемъ ли мы судить о длинѣ забора невидавши его на самомъ дѣлѣ?—Что же для этого намъ нужно сдѣлать?

— *Измприть* его длину аршиномъ.

— Что значитъ измѣрить?

— Значитъ узнать сколько разъ, при послѣдовательномъ наложеніи, аршинъ помѣстится по прямой, или восколько разъ она меньше аршина.

Узнайте—сколько аршинъ помѣстится по длинѣ края нашей большой доски: верхняго, нижняго и боковаго?

Вы видите, что по длинѣ верхняго края аршинъ помѣстился два раза, но отъ этого ребра еще осталась часть на которой аршинъ непомѣстится.—Если бы этой части не оказалось, то восколько аршинъ было бы верхнее ребро доски?—А теперь оно больше или меньше?—Что же надо прибавить къ двумъ аршинамъ чтобы получилась длина верхняго края доски?

Какую часть аршина? — Значитъ, восколько аршинъ будетъ измѣряемое ребро?

— Въ два аршина вмѣстѣ съ половиной аршина или *въ два съ половиной аршина.*

— А сколько разъ помѣщается аршинъ по длинѣ праваго ребра доски?

Какая часть длины еще остается? Какой части аршина равняется остающаяся часть? Стало быть, во сколько аршинъ боковое ребро доски?

— Въ два аршина съ четвертью.

Мѣрить можно только однимъ аршиномъ или есть и другія мѣры длины? Какія же?

— *Сажень, футъ, дюймъ, четверть* и *вершокъ.*

— Какая изъ перечисленныхъ мѣръ самая большая? — Сколько аршинъ имѣетъ сажень?—Сколько въ сажени футъ?— Чего въ сажени больше: футъ или аршинъ?

— Поэтому, какая мѣра длиннѣе—футъ или аршинъ?

На какія части раздѣляется футъ?—На сколько дюймовъ?— А аршинъ на какія части?—Сколько въ аршинѣ *четвертей*

и *вершковъ*?—Что больше *четверть* или *вершокъ*? — Сколько вершковъ приходится на четверть?

Вотъ эта палка въ сажень длиною — нельзя ли повѣрить вѣрно ли она вырѣзана?—Какъ повѣрить? — Сколько въ сажени аршинъ?—Ровно три?—Стало быть, если въ этой палкѣ нѣсколько меньше или больше 3-хъ аршинъ, то будетъ ли она въ сажень длины?—Посмотрите сколько въ ней аршинъ?

Можно ли на нашей доскѣ начертить черту въ сажень длиною?—Почему нельзя.—А въ аршинъ, футъ, дюймъ, четверть, вершокъ?

Такъ какъ эта сажень сдѣлана вѣрно, то не можемъ ли мы по ней опредѣлить длину аршина?

На сколько частей прійдется ее раздѣлить и сколько изъ нихъ взять?

— Нужно раздѣлить на три части и взять одну треть.

— Раздѣлите на три части сажень, съ помощію этаго шнура и затѣмъ проведите на большой доскѣ горизонтальную прямую черту въ аршинъ длиною.

Сколько четвертей въ аршинѣ? Проведите подъ проведенной уже чертой другую горизонтальную черту въ четверть аршина длиною.

Сколько въ четверти вершковъ? Проведите еще горизонтальную черту въ вершокъ длиною.

Можете ли вы провести черту въ футъ длиною?—Сколько въ сажени футовъ?—Умѣете ли вы прямую вѣрно дѣлить на семь частей?

Стало быть нужно снять величину фута съ сажени, которая уже раздѣлена на 7 частей.

Проведите прямую горизонтальную черту, между первою съ верху и второю, въ 1 футъ длиною.

На сколько дюймовъ раздѣляется футъ?—Какъ раздѣлить прямую на 12 частей? — Если мы раздѣлимъ ее сперва на 4 части то насколько нужно раздѣлить каждую четверть, чтобы получилось 12-ть?

Если у васъ есть аршинъ, то какъ по немъ сдѣлать сажень?

Если вы имѣете рейку ровно въ сажень длины, то какъ вырѣзать по ней рейку въ аршинъ, четверть аршина и вершокъ длиною?

Имѣя футъ, какъ можно сдѣлать сажень и дюймъ?

111) Проведите черту равною по длинѣ одному дюйму.

Смотрите я надпишу всѣ мѣры, изображенныя на доскѣ чертами. Первая *сажень*, которую нельзя вычертить на доскѣ поэтому я ее положу сверху доски; вторая—*аршинъ*, третья—*футъ*; четвертая — *четверть*, пятая — *вершокъ* и шестая — *дюймъ*.

Что больше вершокъ или дюймъ; четверть или футъ, аршинъ или футъ?

Какія изъ этихъ мѣръ вы можете изобразить чертами въ тетради? Не можете ли аршины и футы? Почему не можете?— Четверть, вершокъ и дюймъ?

Сдѣлайте изъ бумаги линеечку и снимите на нее съ одной стороны четверть и вершки, а съ другой футъ, раздѣленный на дюймы.

112) Проведите три горизонтальныя черты, изъ которыхъ одна въ четверть, другая въ вершокъ, а третья въ дюймъ.

113) Измѣрьте, при помощи вашей мѣрки, верхній или нижній и правый или лѣвый край обложки тетради т. е. узнайте сколько въ этихъ прямыхъ четвертей, вершковъ или дюймовъ и напишите въ тетради, что въ такомъ-то краѣ такихъ то мѣръ столько то.

114) Узнайте, сколько вершковъ въ переднемъ ребрѣ стола и проведите двѣ пересѣкающіеся черты, изъ которыхъ первая была бы въ восемь разъ меньше измѣренной черты, а вторая въ девять разъ меньше ея.

115) Провести горизонтальную черту въ $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{3}$, $4\frac{3}{4}$ и т. д. вершка, раздѣлить ее на три части и черезъ обѣ точки дѣленія провести внизъ по отвѣсной, изъ которыхъ лѣвая въ три дюйма, а правая равнялась бы $\frac{3}{4}$ лѣвой.

116) Провести наклонную вправо черту въ три вершка длиною; раздѣлить ее пополамъ; черезъ средину провести отвѣсную внизъ равную $\frac{1}{2}$ четверти аршина; нижнія точки проведенныхъ прямыхъ чертъ соединить прямою, которую раздѣлить на 9 равныхъ частей и ото всѣхъ восьми точекъ дѣленія провести прямыя къ верхнему концу первой изъ проведенныхъ чертъ; наконецъ измѣрить вершками всѣ вновь проведенныя черты и обозначить—у каждой изъ нихъ выставить соотвѣтствующее число вершковъ.

107) Поставить двѣ точки въ отвѣсномъ направленіи, въ разстояніи 1, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{3}$ и т. д. вершка; отъ верхней изъ нихъ вправо провести горизонтальную черту въ $\frac{2}{3}$, $1\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$ и т. д. вершка, а отъ нижней влѣво горизонтальную же въ 2,

$2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{3}$ и т. д. дюйма; и измѣрить вершками разстояніе между лѣвымъ концомъ нижней горизонтальной и правымъ концемъ верхней горизонтальной.

118) Провести горизонтальныя прямыя вдвое меньшія прямыхъ въ $4\frac{1}{2}$, $3\frac{2}{3}$, $1\frac{3}{4}$ вершка.

119) Измѣрить разстояніе между двумя точками.

120) Измѣрить разстояніе между концами двухъ пересѣкающихся прямыхъ.

121) Провести прямую равную разности разстояній точки отъ концовъ прямой.

122) Поставить точку въ разстояніи отъ праваго конца горизонтальной прямой въ $1\frac{1}{2}$ вершка.

123) Поставить точку внѣ прямой, которая бы отстояла отъ обоихъ концевъ прямой на одинаковое разстояніе.

124) Поставить точку внѣ прямой, отстоящую отъ одного конца на 1 вершокъ, а отъ другаго на $1\frac{1}{2}$ вершка.

125) Отъ точки внѣ прямой провести другую прямую въ 1, $1\frac{1}{2}$, 2 и т. д. вершка, которая бы упиралась концемъ въ первую прямую.

126) Между двумя прямыми вмѣстить прямую длиною въ 1, $1\frac{1}{4}$ и т. д. вершка.

Можно ли длину забора измѣрять вершками? А какими же мѣрами измѣряютъ обыкновенно длинныя прямыя?—Ну, а если нужно показать плотникамъ длину и направленіе прямой, по которой строится заборъ, то въ какомъ видѣ можетъ быть назначена эта прямая на чертежѣ — на тетради? — А какъ плотникъ узнаетъ во сколько разъ ему нужно увеличить прямую на самомъ дѣлѣ?

Правда, можно написать во сколько разъ уменьшена черта противу настоящей длины, но обыкновенно дѣлаютъ иначе. Вѣдь когда разбиваютъ заборъ, то отмѣриваютъ длину саженями, аршинами. Если плотникъ знаетъ сколько саженей длины долженъ быть заборъ, то онъ легко можетъ и намѣтить черту, по которой его ставить. Но дѣлать надписи на каждой чертѣ рисунка или чертежа неудобно, поэтому вмѣсто надписей дѣлаютъ такъ:

Уменьшаютъ сажень, или аршинъ — словомъ ту мѣру, съ помощію которой назначаются прямыя во столько разъ, чтобы данныя прямыя могли помѣститься на чертежѣ и эту уменьшенную мѣру означаютъ въ сторонѣ чертежа, надпи-

савъ на ней названіе мѣры — сажень, аршинъ и т. д. На картахъ и чертежахъ вы, я думаю, и видѣли такія уменьшенныя мѣры. Послѣ этого уже легко нанести на чертежѣ всѣ черты, измѣривъ ихъ въ дѣйствительности саженью и аршиномъ, и откладывая на бумагѣ соотвѣтствующимъ числомъ мѣръ уменьшенныхъ. Такъ, это (верхнее) ребро классной доски имѣетъ длину въ $2\frac{1}{2}$ аршина, въ тетради такой длинной черты вы не можете провести поэтому вы уменьшаете аршинъ напримѣръ въ 16 разъ, такъ что дѣлаете на тетради равный 1 вершку; затѣмъ, если понадобится вамъ нанести въ уменьшенномъ видѣ всѣ ребра доски, вы смѣриваете ихъ настоящимъ аршиномъ, и откладываете на бумагѣ уменьшенными.

127) Проведите у нижняго края листа на тетради черту въ $1\frac{1}{2}$ вершка длиною, примите ее за аршинъ и надпишите возлѣ слово *аршинъ*, чтобы видно было что это черта принята нами за аршинъ; затѣмъ измѣряйте всѣ прямыя ребра нашей большой классной доски и проведите ихъ у себя въ тетради откладывая длину по вашему аршину.

Какъ велика длина верхняго горизонтальнаго ребра доски? Проведите у себя въ тетради горизонтальную черту по длинѣ равную $2\frac{1}{2}$ вашимъ аршинамъ. Какъ велика длина лѣваго отвѣснаго ребра доски?—А праваго? Проведите, стало быть, отъ концевъ вашей горизонтальной черты двѣ отвѣсныя равныя по длинѣ 2-мъ вашимъ аршинамъ. Соедините нижнія точки прямою и измѣрьте вашимъ аршиномъ полученную такимъ образомъ прямую. Если мы уменьшимъ нашъ условный аршинъ и захотимъ вычертить доску точно также какъ это дѣлали сейчасъ, то будетъ ли разница въ чертежѣ?—Какая?

— Прямыя выйдутъ меньше.

— А если увеличимъ нашъ условный аршинъ?

— Тогда прямыя выйдутъ больше.

128) Проведите, при помощи вашего аршина, три отвѣсныя прямыя черты, изъ которыхъ первая изображала бы это отвѣсное ребро оконной рамы, вторая это ребро двери и третья этотъ отвѣсный шнуръ.

Ученикамъ раздаются простенькіе прямолинейные чертежи доски, оконнаго отверстія, стѣны съ окнами и пр.; они опредѣляютъ длину чертъ въ аршинахъ и пробиваютъ эти черты въ натуральной длинѣ на полу, на стѣнахъ, на дворѣ и въ полѣ. И обратно, ученики проводятъ на чертежѣ

рядъ чертъ, изображающихъ въ уменьшенномъ видѣ различнаго рода прямыя на мѣстности, на полу, на стѣнахъ и т. д., измѣряя ихъ саженями, аршинами футами и т. д., при различномъ уменьшеніи условной (масштабной) мѣры.

XIV.

129) Раздѣлить горизонтальную прямую длиною въ два вершка на двѣ *неравныя* части, изъ которыхъ лѣвая вдвое болѣе правой.

Сколько вамъ нужно поставить точекъ на прямой для рѣшенія задачи?—Сколько разъ меньшая часть должна помѣститься на большей? На сколько частей нужно раздѣлить большую?—Сколько точекъ нужно для этого поставить?

Положимъ что задача рѣшена т. е. что на прямой поставлена *одна* точка, дѣлящая ее на двѣ части, изъ которыхъ меньшая вдвое менѣе большей. Если раздѣлить большую пополамъ, то обѣ части большей будутъ равны между собою и равны меньшей? Стало быть, всѣ три части прямой: обѣ половины большей части и меньшая часть—равны между собою?

Не разскажетъ ли теперь кто нибудь изъ васъ какъ нужно сдѣлать предложенную задачу?

— Нужно раздѣлить прямую на три части и отдѣлить одну треть: тогда эта треть и будетъ требуемой заданіемъ меньшей частью а остальныя двѣ трети вмѣстѣ взятыя, если точка ихъ раздѣляющая будетъ стерта составятъ *большую* часть—въ 2-е большую меньшей.

130) Раздѣлить наклонную вправо прямую черту на двѣ неравныя части, изъ которыхъ верхняя втрое, въ пять и т. д. разъ меньше нижней *).

131) Раздѣлить горизонтальную прямую въ 3 вершка дли-

---

*) Здѣсь, при составленіи задачи, необходимо обратить вниманіе, чтобы ученикамъ непришлось дѣлить прямую на такое число частей, на какое они еще не раздѣляли прямыхъ.

ною на три части, изъ которыхъ лѣвая вдвое меньше средней части, а правая втрое больше лѣвой.

Сколько частей, по длинѣ, равныхъ лѣвой части должно заключаться въ средней?—А въ первой вмѣстѣ съ средней?—Сколько частей равныхъ по длинѣ лѣвой части должно быть въ правой части?—А въ лѣвой, средней и правой вмѣстѣ?—На сколько, стало быть, частей вамъ надо раздѣлить прямую?—Сколько частей взять для первой, второй и третьей части?

132) Раздѣлить наклонную влѣво черту по длинѣ равную $2^1/_2$ вершкамъ на три неравныхъ части, изъ которыхъ правая равна лѣвой, а средняя вчетверо больше лѣвой?

Смотрите, я проведу горизонтальную прямую черту и раздѣлю ее на три равныя части. Если я сотру лѣвую точку, то черта раздѣляется на двѣ неравныя части изъ которыхъ какая будетъ больше?—И во сколько разъ?

Теперь я раздѣлю на восемь частей такую же черту и сотру всѣ точки дѣленія за исключеніемъ третьей съ лѣва Насколько частей раздѣлится прямая?—Какая часть будетъ больше?—Во сколько разъ?—Сколько частей заключается въ правой части? Лѣвой? А равны ли между собою части заключающіяся въ лѣвой части тѣмъ, которыя составляютъ правую часть?

Значить, въ правой части *пять* такихъ частей какихъ въ лѣвой только *три*.

133) Раздѣлить горизонтальную прямую длиною въ 3 вершка на такія двѣ части, изъ которыхъ въ первой было бы *двѣ* такія части, какихъ во второй *четыре*.

134) Раздѣлить отвѣсную прямую въ $1\frac{1}{2}$ вершка длиною на три части, изъ которыхъ въ верхней было бы двѣ такія части, какихъ въ средней—три, а нижняя была бы вдвое больше верхней?

Теперь я проведу двѣ горизонтальныя прямыя, изъ которыхъ въ первой *три* такихъ части какихъ во второй *четыре*·

Что нужно сдѣлать съ первой изъ нихъ, чтобы она стала равною второй?—А со второй?

Если бы, вмѣсто двухъ линій, которыя вы видите на доскѣ, была бы дана только одна изъ нихъ и притомъ было бы сказано, что въ искомой линіи *три* такихъ части какихъ въ данной *двѣ*.—могли ли бы вы вычертить вторую линію?—Какъ это сдѣлать?—Помните какъ вы дѣлали тоже

самое при томъ условіи, когда искомая линія была вдвое, втрое и т. д. раза меньше или больше данной?

135) По прямой *а* вычертить прямую *б*, зная, что *а* заключаетъ въ себѣ три такія части, какихъ въ *б* семь.



Вопросы для повторенія.

1) Что называется точкой и линіей?

2) Какія линіи называли мы прямыми, кривыми и ломаными?

3) Чѣмъ отличаются кривая и ломаная отъ прямой?

4) Чѣмъ сходны и чѣмъ различаются ломаная и кривая между собою?

5) Какимъ образомъ шнурокъ, изогнутые прутъ или проволоку сдѣлать прямыми?

6) Что мы замѣчаемъ при наложеніи прямыхъ одна на другую?

7) Какъ удостовѣриться пряма ли черта или ребро, при помощи нитки или шнура?

8) Какою представляется намъ прямая, если смотрѣть на нее съ одного конца на другой?

9) Какъ повѣрить линейку?

10) Какъ повѣрить прямую, проведенную отъ руки, при помощи линейки?

11) Какъ провести прямую, при помощи шнура и линейки?

12) Какія прямыя называются пересѣкающимися и какія сходящимися?

13) Сколько прямыхъ, ломаныхъ и кривыхъ можно провести черезъ одну точку?

14) Сколько прямыхъ, ломаныхъ и кривыхъ, можно провести черезъ двѣ точки?

15) Сколько прямыхъ, кривыхъ и ломаныхъ можно провести черезъ двѣ точки?

16) Можно ли поставить двѣ точки такъ, чтобы черезъ нихъ можно было провести болѣе одной прямой?

17) А можно ли такъ поставить три, четыре и болѣе точекъ, чтобы черезъ нихъ можно было провести прямую линію?

18) Какія прямыя называются горизонтальными и какія отвѣсными?

19) Какъ найти превышеніе одной точки надъ другою?

20) Какъ узнать равны ли прямыя линіи, или которая изъ нихъ больше?

21) Какъ провести прямую равную по длинѣ нѣсколькимъ даннымъ прямымъ, взятымъ вмѣстѣ?

22) Какъ провести прямую, по длинѣ равную одной изъ данныхъ прямыхъ безъ другой?

23) Какъ провести прямую равную нѣсколько разъ взятой данной прямой?

24) Какъ раздѣлить прямую на 2, на 3, на 4, на 6 и т. д. частей?

25) Какъ провести прямую въ нѣсколько разъ меньшую по длинѣ данной, или равную одной или нѣсколькимъ частямъ данной?

26) Что называется мѣрою длины?

27) Какія мѣры длины вы знаете?

28) Для чего существуютъ различные мѣры длины: вёрсты, сажени, футы, дюймы и т. д?

29) Что называется *измѣрить* прямую?

30) Что называли мы масштабомъ, и для чего онъ употребляется?

31) Какъ измѣрить разстояніе между точками?

32) Какая изъ проведенныхъ между двумя точками линій (прямая, кривая или ломаная) самая короткая?

На эти и подобные вопросы дѣти отвѣчаютъ опредѣленіями, которыя выведены были ими самими на предшествующихъ урокахъ, изъ ихъ собственныхъ наблюденій и при помощи наводящихъ вопросовъ учителя. Если бы какое либо изъ пройденныхъ раньше понятій оказалось недостаточно ясно усвоеннымъ или уясненнымъ, необходимо дать рядъ задачъ, подобныхъ продѣланнымъ выше, для уясненія и усвоенія этого понятія и ни въ какомъ случаѣ не слѣдуетъ дозволять запоминать и повторять неясно понятое опредѣленіе изъ опасенія не повредить дальнѣйшимъ успѣхамъ учениковъ.

Полезно также требовать отъ учениковъ письменныхъ отвѣтовъ на задаваемыя на домъ вопросы, обращая при этомъ вниманіе на правильность опредѣленій и выводовъ и точность выраженій, что необходимо, не только для цѣлей обученія геометріи, но для выроботки логики вообще.

Объ углахъ.

I.

Учитель проводитъ на классной доскѣ двѣ пары прямыхъ чертъ, изъ которыхъ черты одной пары сходятся и образуютъ уголъ, а черты другой не сходятся (но могутъ быть и непараллельными), и спрашиваетъ, какая разница во взаимномъ положенiи прямыхъ въ этихъ парахъ т. е. въ положенiи одной прямой относительно другой?

— Черты одной пары *сходятся*, а черты другой *несходятся*.

— Не знаетъ ли кто изъ васъ, что образуется двумя линiями, когда они сходятся? Что образуется этими стѣнами въ томъ мѣстѣ, гдѣ онѣ сходятся? Смотрите, я поставлю въ это мѣсто стулъ; гдѣ стоитъ стулъ?

— Въ углу.

— Стало быть, стѣны сходясь образуютъ что?

— *Уголъ*.

— Начертите у себя въ тетради какой нибудь уголъ.

Покажите уголъ, составленный двумя прямыми ребрами Краями бумаги?—Сдѣлайте уголъ съ помощiю этихъ двухъ линеекъ, шнура и т. д.? Вырѣжте угломъ, съ какой нибудь стороны, этотъ кусокъ бумаги?

Учитель вычерчиваетъ два угла со сторонами одинаковой длины, изъ которыхъ одинъ замѣтно больше другаго, и спрашиваетъ: одинаковы ли эти углы? Чѣмъ же они различаются?

Черты составляющiя верхнiй изъ нихъ расходятся больше нежели черты составляющiя нижнiй.

Затѣмъ учитель показываетъ ученикамъ два равные угла съ равной длины сторонами, и спрашиваетъ который изъ угловъ больше?

— Они оба равны, потому что стороны ихъ одинаково расходятся.

— А если я вамъ покажу эти два угла (равные но со сторонами различной длины), то у котораго стороны шире расходятся?

— У обоихъ расходятся одинаково
— А какъ вы думаете, который изъ нихъ больше?
— Оба равны.
— Значитъ, отъ увеличенія сторонъ увеличивается ли величина угла?

Покажите мнѣ два угла, составляемые ребрами или краями бумаги, стороны которыхъ были бы равны. Два угла, изъ которыхъ стороны одного были бы больше чѣмъ стороны другаго.

136) Начертите три угла, изъ которыхъ второй больше перваго, а третій меньше перваго.

Посмотрите на уголъ, начерченный на этомъ листѣ бумаги. Смотрите, я поворочу листъ такъ что одна изъ его сторонъ стала дальше отъ васъ чѣмъ была, теперь посмотрите на уголъ: неизмѣнился ли онъ по величинѣ?—Что, онъ больше сталъ, или меньше? Если я поворочу листъ иначе, тогда какъ уголъ измѣняется? Если бы вы смотрѣли на уголъ не прямо, а съ боку, то могли ли бы вы видѣть настоящее раствореніе сторонъ? Поэтому, мы будемъ смотрѣть на углы всегда прямо, чтобы не ошибиться въ его опредѣленіи.

Запомните, что та точка, къ которой сходятся черты или вообще прямыя образующія уголъ называется *вершиною угла* а самыя прямыя называются *сторонами угла*.

Преподаватель чертитъ на доскѣ нѣсколько равныхъ между собою угловъ со сторонами различной длины и спрашиваетъ у дѣтей: равные ли это углы? Затѣмъ чертитъ нѣсколько угловъ равныхъ между собою и съ равными сторонами, но обращенныхъ отверзстіями въ различныя стороны *въ верхъ*, *въ низъ*, *въ право*, *въ лѣво*, *въ верхъ — въ право въ низъ — въ право* и т. д. и спрашиваетъ чѣмъ отличаются эти углы?

— Тѣмъ что одни изъ нихъ обращены остріями или вершиной *въ верхъ*, а отверзтіемъ *въ низъ*, а другіе на оборотъ отверзтіемъ *въ верхъ*, а вершиною *въ низъ* и т. д.

Покажите мнѣ на предметахъ въ классѣ уголъ обращенный отверзтіемъ *въ верхъ—въ право*, *въ верхъ—въ лѣво*, *въ низъ* и т. д.

137) Начертите четыре угла, обращенные отверзтіями *въ верхъ*, *въ право*, *въ лѣво*, *въ низъ*, равные между собою и съ сторонами въ вершокъ длины.

138) Начертить три угла, неравные между собою, обращенные отверстіями въ верхъ и съ сторонами въ $1\frac{1}{2}$ вершка длины.

139) Обозначить нѣсколько угловъ различной величины точками.

140) Обозначить уголъ тремя точками.

А можно ли обозначить уголъ двумя точками, или одной точкой?

Почему нельзя? Сколько нужно точекъ, чтобы опредѣлить положеніе прямой?—Стало быть, нужно не менѣе 3-хъ точекъ?

— Почему достаточно трехъ?

— Потому что, такъ какъ прямыя, составляющія уголъ сходятся, то онѣ имѣютъ общую точку, которая можетъ служить одновременно для опредѣленія обѣихъ сторонъ, а остальныя двѣ точки должны быть взяты на каждой сторонѣ отдѣльно.

На классной доскѣ, на полу, на дворѣ и даже въ полѣ, если будетъ возможно, ученики, подъ руководствомъ преподавателя, разбиваютъ углы при помощи чертъ, пробиваемыхъ шнуромъ, бороздъ, ряда кольевъ или вѣхъ.

II.

Преподаватель выставляетъ равные два угла, изъ нихъ первый образованъ прямыми краями бумаги, а второй такими же проволоками и спрашиваетъ: какой изъ этихъ угловъ большій?

Почему вы узнали что они равны?

Нельзя ли въ этомъ удостовѣриться потому что, при опредѣленіи чего либо на глазъ, легко ошибиться?—Вы помните какъ мы поступали когда хотѣли удостовѣриться равны ли прямыя? Можно ли накладывать углы одинъ на другой? Какъ накладывать углы одинъ на другой? Вспомните какъ мы накладывали прямую на прямую?

— Мы прикладывали одну прямую къ другой такъ, чтобы первая прямая вездѣ плотно прилегала ко второй. Одинъ

изъ концевъ первой прямой совпадалъ бы съ соотвѣтствующимъ концомъ второй. Если два другіе конца совпадали, то мы признавали, что одна прямая совмѣщается съ другою.

Это наложеніе, если бы не достаточно вспомнилось на словахъ, нужно продѣлать на самомъ дѣлѣ.

Въ углѣ двѣ прямыхъ, стало быть нужно, чтобы обѣ онѣ прилегали одна къ другой по всей длинѣ. А вершины угловъ при наложеніи должны ли совпадать? Такъ разскажите же какъ наложить одинъ уголъ на другой.

— *Нужно наложить сначала вершины угловъ одна на другую; затѣмъ, не отнимая вершины, совмѣстить сторону одного угла съ одною изъ сторонъ другаго. Если при этомъ обѣ остальныя стороны могутъ совмѣститься одна съ другой, то углы равны между собою; если другая сторона перваго угла помѣстилась бы между сторонами того, на который накладывали, то первый меньше втораго; а если бы она помѣстилась въ сторонѣ отъ сторонъ втораго, то на оборотъ— первый больше втораго.*

— Сдѣлайте такое наложеніе съ выставленными углами: наложите уголъ, образуемый этими ребрами на уголъ образуемый этими проволоками.

Докажите, что углы образуемые краями листа вашей тетради и ребрами доски равны между собою.

Преподаватель чертитъ два незамѣтно различающіеся угла съ равными сторонами и спрашиваетъ учениковъ:

Равны ли эти углы?—Не ошибаетесь ли?

Какъ можно удостовѣриться въ томъ, что углы дѣйствительно равны?

Можно ли накладывать эти углы одинъ на другой?—Что нужно сдѣлать прежде чѣмъ мы можемъ приступить къ наложенію?

— Снять величину угла на что нибудь.

— Правда, но какъ же снять то его?—Когда мы имѣли дѣло съ прямою—тамъ намъ помогла полоска бумаги, бумажная линеечка и наконецъ циркуль... Подумайте какъ снять на что нибудь уголъ?—Вѣдь уголъ показываетъ раствореніе прямыхъ, нельзя ли это раствореніе снять на бумагу?—На прозрачную напримѣръ бумагу? — Что же тогда мы должны сдѣлать?

— Провести стороны угла отъ точки соединенія.

— Важно ли тутъ проводить стороны до концевъ?—Если

бы стороны угла были очень длинные, а кусочекъ прозрачной бумаги небольшой, то нельзя ли, въ такомъ случаѣ, снять величину угла? Если стороны проведены только частью, то какъ ихъ довести. и можно ли ихъ довести?

— Можно, потому что онѣ прямыя; для этого стоитъ только снять ихъ длину и продолжить, если понадобится на, сколько нужно.

Можно ли, снятый такимъ образомъ уголъ наложить на какой либо другой уголъ, напримѣръ на второй изъ начерченныхъ? Какъ это сдѣлать?

— Нужно наложить кусокъ прозрачной бумаги, на которой снятъ первый уголъ на то мѣсто, гдѣ вычерченъ второй уголъ и, такъ какъ черезъ прозрачную бумагу видны черты на доскѣ точно также какъ и черты проведенныя на бумагѣ, то слѣдуетъ двигать прозрачную бумагу такъ, чтобы вершина, вычерченнаго на немъ угла совпала съ вершиной угла на доскѣ и одна изъ сторонъ перваго пошла бы по одной изъ сторонъ втораго. Тогда, если углы равны, то остальныя стороны пойдутъ одна по другой.

— Можно снять уголъ, при помощи куска обыкновенной бумаги. Для этого прямой край куска нужно наложить на одну изъ сторонъ угла такъ, чтобы конецъ края совпадалъ съ вершиною угла и затѣмъ, прижавъ бумагу неподвижно, отогнуть часть листа такъ, чтобы сгибъ пришолся на другой сторонѣ угла.

А нельзя ли точно такимъ же образомъ снять уголъ, образованный краями или ребрами?

Преподаватель вычерчиваетъ на доскѣ нѣсколько угловъ и выставляетъ нѣсколько другихъ угловъ, образуемыхъ краями бумаги и проволоками и вызываетъ желающихъ снять эти углы на листокъ бумаги.

Работа ведется при участіи всего класса, который слѣдитъ за правильностію ея и напоминаетъ вызваннымъ къ доскѣ забытое и разъясняетъ неясно усвоенное.

Правильно ли В накладываетъ?

— Нѣтъ, онъ кривой край бумаги накладываетъ на сторону угла.

— Вотъ теперь наложенъ прямой край—значитъ вѣрно?

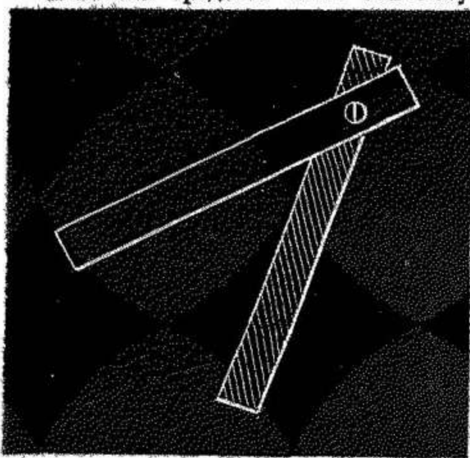
— Нѣтъ у него край не прилегаетъ къ сторонѣ угла, и одинъ изъ концевъ края не совпадаетъ съ вершиной.

— Поправся В.

Ученикамъ раздаютъ куски бумаги въ $^1/_8$ или $^1/_{16}$ долю листа, у которыхъ одинъ изъ краевъ совершенно прямой.

Снимите, при помощи розданныхъ вамъ листковъ бумаги, всѣ три угла, данные на таблицѣ.

Есть еще средство снять величину угла — это, при помощи раздвижнаго наугольника, называемаго *малкою* *) При раздвиганіи дощечекъ малки уголъ, образуемый ея ребрами увеличивается, а при сдвиганіи уменьшается.



Чѣмъ снимали мы длину прямыхъ?

— Бумажкой, ниткой и *циркулемъ*.

— Чему соотвѣтствуетъ здѣсь малка?

— Циркулю.

— Кто нибудь изъ васъ, ну хоть Д, сниметъ начерченный мною уголъ съ помощію малки.

В, сними посредствомъ малки уголъ, образуемый этими двумя ребрами доски.

Снимите малкою одинъ изъ угловъ, вычерченныхъ на таблицѣ.

Теперь вы умѣете снимать величину угла съ помощію листка бумаги и малки, подобно тому какъ снимали длину прямыхъ съ помощію *полоски бумаги* и *циркуля*.

Вычертите какой нибудь уголъ и скажите—будетъ ли онъ равнымъ углу, вычерченному мною здѣсь въ записной книжкѣ.

— А что вамъ надо знать объ этомъ углѣ, чтобы утверждать, что онъ равенъ вами—вычерченному?

— *Нужно знать совпадаетъ ли онъ съ нашимъ угломъ при*

---

*) Такую малку весьма не трудно сдѣлать самому учителю изъ двухъ дощечекъ, вырѣзанныхъ изъ драни, соединенныхъ булавкою.

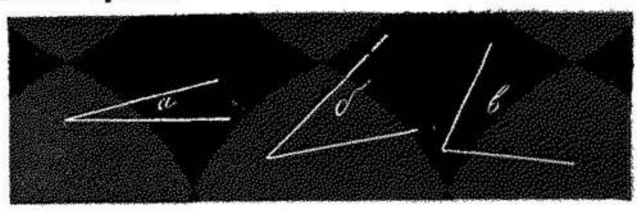
наложеніи т. е. совпадаетъ ли, при этомъ, его вершина и объ стороны съ вершиною и сторонами нашего угла.

III.

Попробуйте, кто нибудь, начертить на доскѣ уголъ равный углу, образуемому этими проволоками?—К выйди и сдѣлай что задано.

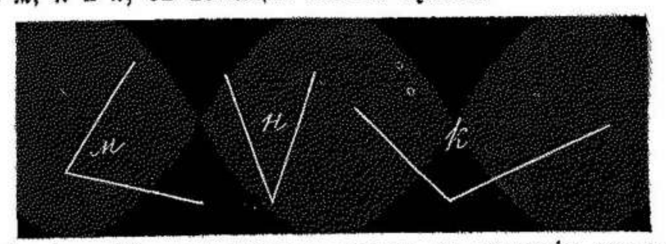
Какъ начертить уголъ, образованный проволоками или вырѣзанный изъ тонкой дощечки или папки?

113) Вычертите углы равные угламъ а, б и в, съ помощію листка бумаги.



Длина сторонъ должна быть различною, и можете опредѣлить ее по своему усмотрѣнію *)

114) Вычертить углы нѣсколько большіе или меньшіе угловъ *м*, *н* и *к*, съ помощію листка бумаги.



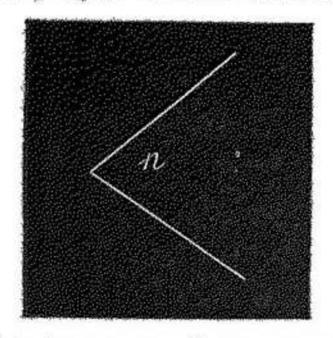
Сдѣлайте обѣ предложенныя задачи съ помощію малки.

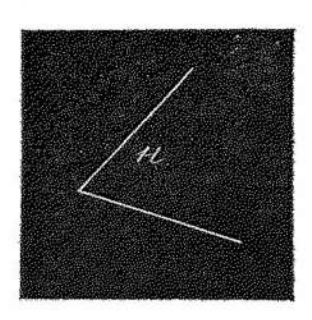
---

*) Вообще въ этихъ задачахъ слѣдуетъ намѣренно устранять всякую мысль о длинѣ сторонъ, такъ какъ здѣсь имѣется въ виду исключительно раствореніе сторонъ и соображенія о длинѣ сторонъ только развлекали бы учениковъ.

116) Назначить двумя рядами точекъ уголъ равный данному углу *n*.

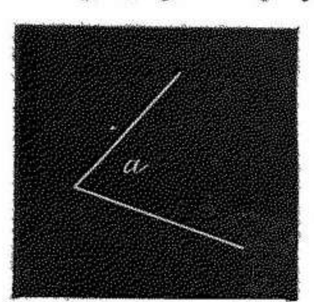
117) Тремя точками означить уголъ равный углу *н*.





К выйди къ доскѣ, и означъ на ней уголъ равный, образуемому этими двумя ребрами стола.

118) Обозначить на большой классной доскѣ рядами булавокъ уголъ равный углу *a*.



Хорошо ли видѣнъ будетъ вамъ уголъ, обозначенный на доскѣ съ такими же короткими сторонами какими онъ образованъ у васъ на таблицѣ?

Стало быть, нужно стороны сдѣлать гораздо большими, напр. не менѣе аршина.

А нельзя ли нанести такой уголъ съ длинными сторонами при помощи $^1/_8$ доли листа бумаги? Какъ это сдѣлать? К выйдетъ къ доскѣ и исполнитъ заданное, при помощи вотъ этого листка бумаги ($^1/_8$ листа).

Разскажите кто нибудь какъ дѣлалъ К.

— Снялъ уголъ и обозначилъ его короткими сторонами, а затѣмъ приложилъ линейку къ выставленному одному, а потомъ другому ряду булавокъ и продолжилъ прямыя до краевъ доски.

— А нельзя ли это сдѣлать иначе, безъ линейки?

— Можно продолжить стороны иначе, а именно: нужно посмотрѣть черезъ булавку обозначающую вершину угла на другія булавки обозначающія одну изъ сторонъ; такимъ обра-

зомъ и будетъ видно гдѣ ставить дальнѣйшія булавки на продолженіи сторонъ.

А нельзя ли, не отнимая снятаго на бумагу угла, обозначить стороны?

— Можно, тогда слѣдуетъ смотрѣть вдоль одной изъ сторонъ снятаго угла—тогда и будетъ видно какъ ставить булавки на ея продолженіи; тоже самое прійдется сдѣлать и для второй стороны и наконецъ поставить точку въ вершинѣ угла.

119) Обозначить тремя булавками на доскѣ уголъ равный образованному этими двумя ребрами.

Въ внѣклассное время ученики занимаются разбивкой угловъ равныхъ даннымъ, пользуясь при этомъ *малкою*. Снявъ величину даннаго угла малкою, устанавливаютъ ее на воткнутомъ шестѣ такъ, чтобы плоскости дощечекъ были параллельными горизонту (все это не объясняется словесно, а показывается на дѣлѣ); затѣмъ глядя, по направленію одной стороны угла образуемаго внутренними ребрами малки, разставляютъ колья, обозначающіе стороны угла.

IV.

Если отъ вершины угла, между его сторонами, проведемъ прямую, то какое измѣненіе произойдетъ съ угломъ?—Помните, когда мы ставили на прямой точку, то какія измѣненія съ нею происходили?

На сколько частей раздѣляется уголъ проведенной прямой? Если вмѣсто одной прямой, мы проведемъ двѣ прямыя, то на сколько частей тогда раздѣляется уголъ?—А тремя прямыми?

Части прямой суть также прямыя, а части угла?—Если мы раздѣлимъ на части яблоко или пуговицу, то будутъ ли эти части яблоками или пуговицами?

А части прямой? Чѣмъ отличаются части прямой отъ прямой?

— Только длиною?

— Что больше часть прямой или прямая?

— А части угла?

— Части угла суть также углы, отличающіеся отъ цѣлаго только величиною т. е. раствореніемъ сторонъ.

— Гдѣ раствореніе сторонъ больше: у цѣлаго угла или у его части?

120) Начертить три какіе нибудь угла; изъ нихъ 1-й раздѣлить на двѣ части, 2-й на три и 3-й на четыре.

Вотъ, я начертилъ уголъ и раздѣлилъ его на двѣ части. Которая изъ нихъ большая?

М вычертитъ на доскѣ уголъ равный меньшей части, а В уголъ равный большей части, съ помощію малки.

Всѣ остальные сдѣлаютъ тоже въ своихъ тетрадяхъ т. е. начертятъ уголъ, раздѣлятъ его на двѣ части, изъ которыхъ одна больше другой и затѣмъ вычертятъ обѣ части: большую и меньшую.

Учитель стираетъ черту раздѣлившую построенный имъ уголъ и спрашиваетъ:

Нельзя ли составить изъ этихъ двухъ малыхъ угловъ — уголъ равный начерченному мною?

Какъ надо это сдѣлать?

— Приложить одинъ изъ маленькихъ угловъ къ другому такъ, чтобы вершины ихъ и по одной изъ сторонъ совпадали, а остальныя стороны шли по обѣ стороны совпавшихъ *).

К сложи изъ этихъ двухъ выгнутыхъ изъ проволоки угловъ—одинъ.

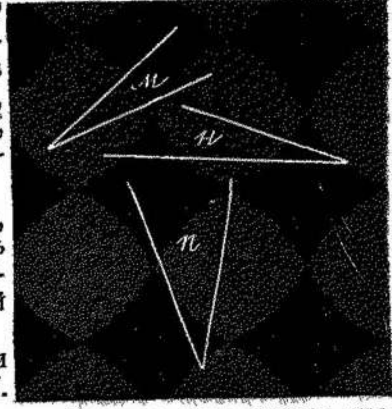
121) Изъ двухъ угловъ *а* и *б* составить одинъ равный ихъ суммѣ.

Разскажите какъ вы дѣлали эту задачу.

— Сначала мы сняли на малку уголъ *б*, затѣмъ приложили малку къ доскѣ такъ, чтобы вершина угла на малкѣ совпадала съ вершиною угла на доскѣ и сторона угла на малкѣ съ стороною угла на доскѣ и наконецъ провели прямую карандашемъ по другой прямой сторонѣ угла на малкѣ.

*) Если бы такой пріемъ затруднилъ дѣтей, то можно воспользоваться угломъ, вырѣзаннымъ изъ бумаги, раздѣлить его сначала чертой или сгибомъ, а потомъ разрѣзать. Тогда возможность составить изъ двухъ угловъ одинъ представится нагляднѣе.

122) Изъ трехъ угловъ *м*, *н* и *п* составить одинъ уголъ. Какъ исполнить эту задачу?



— Сначала къ углу *м* приложили *н*, а потомъ къ суммѣ первыхъ приложили уголъ *п*, точно такимъ же способомъ, какъ дѣлали это при рѣшеніи 120-й задачи.

123) Изъ трехъ угловъ *к*, *л* и *т*, составить два угла, изъ которыхъ первый равенъ суммѣ угловъ *к* и *л*, а второй суммѣ угловъ *л* и *т*.

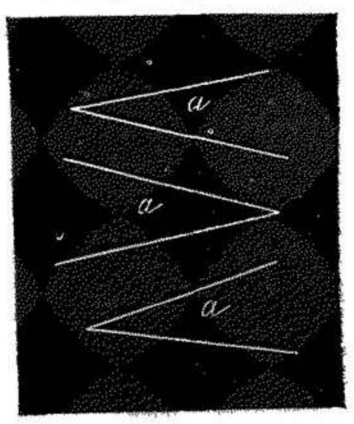
124) Вырѣжте изъ бумаги уголъ равный суммѣ угловъ *а* и *б*.

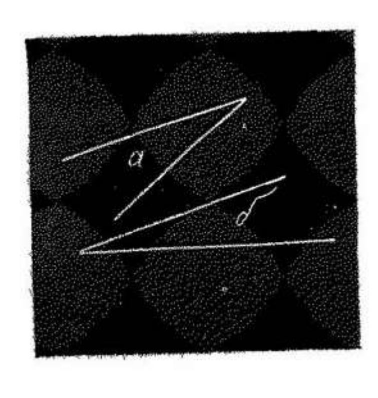
На полу, на дворѣ ученики разбиваютъ углы равные суммѣ нѣсколькихъ данныхъ угловъ.

125) Составить уголъ изъ трехъ равныхъ угловъ *а*, *а* и *а*. Нельзя ли иначе задать эту задачу?

Какъ иначе?

— Вычертить уголъ втрое большій даннаго угла *а*.





126) Вычертить два угла, изъ которыхъ первый вдвое большій угла *а*, а второй втрое большій угла *б*.

V.

Преподаватель чертитъ на классной доскѣ два угла, изъ которыхъ одинъ замѣтно больше другаго и спрашиваетъ:

Равны ли эти углы?—Какъ можно доказать что они не равны?—В подойди къ доскѣ и наложи меньшій уголъ на *большій*.

Преподователь прикрѣпляетъ булавками меньшій уголъ, снятый на булавку въ положеніи, при которомъ вершина и одна изъ сторонъ его совпадаютъ съ вершиной и одной изъ сторонъ большаго, а другая сторона перваго находится между сторонами втораго.

Образуется ли при этомъ уголъ? Какъ можно назвать этотъ маленькій оставшійся по наложеніи уголъ?

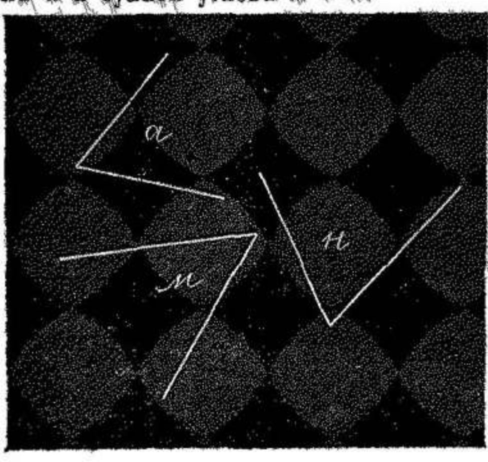
— Остаткомъ или разностію между большимъ и меньшимъ углами.

Что показываетъ остатокъ отъ вычитанія или отнятія отъ большаго угла меньшаго?

На сколько большій уголъ меньше меньшаго?

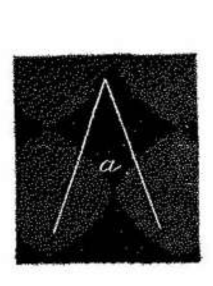
127) Вычертить уголъ равный разности между углами *а* и *б*.

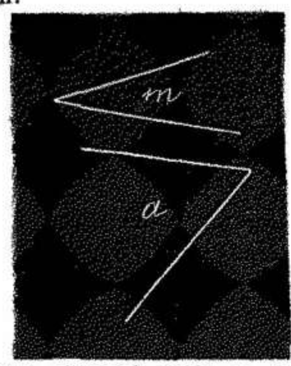
128) Обозначить рядомъ точекъ уголъ равный разности между угломъ *а* и суммой угловъ *м* и *н*.



129) Вычертить уголъ равный разности между угломъ, образуемымъ краями обложки вашей тетрадки и угломъ *а*.

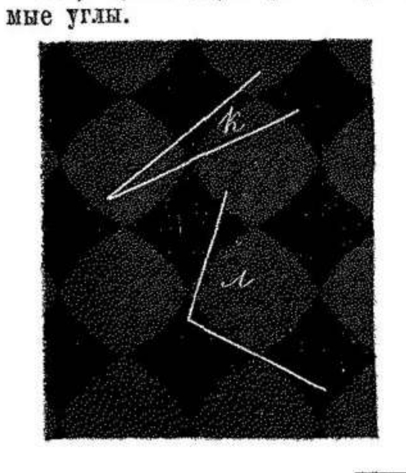
130) По разности между углами, равной углу *m* и меньшему углу *а*—вычертить большій.

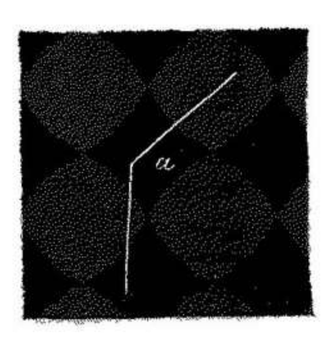




131) По разности между углами, равной углу *к* и большему углу *л*—нанести точками меньшій.

132) Сумма двухъ угловъ равна углу *а*; вычертить слагаемые углы.





VI.

Я начерчу на доскѣ уголъ, а кто нибудь изъ васъ—ну хоть Р—раздѣлитъ его на двѣ части.

Равны ли между собою части, на которыя раздѣленъ уголъ? А нельзя ли раздѣлить его на равныя части? К попытайся раздѣлить. Вѣрно ли раздѣлилъ К уголъ на равныя части? В повѣрь равны ли части—съ помощію малки. Вычертите, каждый у себя въ тетради какой нибудь уголъ и попытайтесь его раздѣлить на двѣ равныя части.

Повѣрьте свою работу и поднимите руку тѣ изъ васъ, которые сдѣлали вѣрно.

Б разскажи какъ можно повѣрить раздѣленіе угла на двѣ равныя части.

— Нужно снять малкою или, съ помощію листа бумаги, одну часть раздѣленнаго угла и наложить ее на другую. Тогда и обозначится—равны ли обѣ части, а слѣдовательно и то—вѣрно ли сдѣлана задача.

— Кто сдѣлалъ вѣрно? Немногіе. Подумайте, какъ бы отыскать пріемъ точнаго раздѣленія угла на двѣ равныя части? Помните, какъ мы дѣлили на равныя части прямую? Не поможетъ ли и тутъ бумажка? Кто разскажетъ, какъ это сдѣлать?

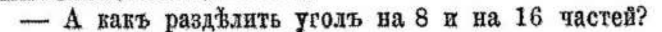
— Нужно снять на бумагу величину угла и затѣмъ перегнуть ее такимъ образомъ, чтобы сгибъ проходилъ черезъ вершину угла, а обѣ стороны совпали бы. Если теперь развернуть сложенный вдвое уголъ, то прямая сгиба будетъ какъ разъ посрединѣ между сторонами, а обѣ части, какъ совмѣщенныя уже при перегибѣ, будутъ равны.

133) Вычертить уголъ равный углу, образованному краями листа на вашей тетради и раздѣлить его пополамъ.

134) Нанести точками уголъ равный углу a и раздѣлить его пополамъ.

Не скажетъ ли теперь кто нибудь какъ раздѣлить уголъ на четыре равныя части?

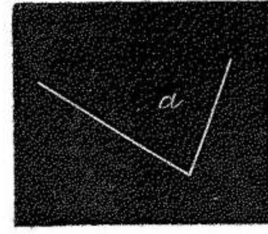
— Нужно сначала раздѣлить уголъ пополамъ, и затѣмъ половины—опять пополамъ.

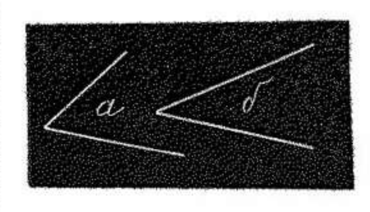


— А какъ раздѣлить уголъ на 8 и на 16 частей?

135) Вычертить уголъ равный *а* и раздѣлить его на 4 равныхъ части.

136) Сумму угловъ *а* и *б* раздѣлить на 8 частей.





Какъ раздѣлить уголъ на *три части*?

— Для этого нужно снять величину угла на листокъ бумаги и затѣмъ сложить уголъ втрое такъ, чтобы оба сгиба проходили черезъ вершину и одинъ изъ нихъ совпадалъ бы съ одной стороной угла, а другой—съ другой *)

М, выйди къ доскѣ и раздѣли на три части вотъ этотъ уголъ.

137) Вычертить уголъ равный *а* и раздѣлить его на три равныя части.

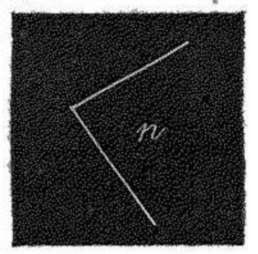
138) Вычертить уголъ равный углу *n* и раздѣлить его на *шесть* равныхъ частей.

Какъ вы это сдѣлали? На сколько раздѣлили сначала? А потомъ половины раздѣлили на сколько?

А нельзя ли эту самую задачу сдѣлать инымъ путемъ? Какъ, разскажите?

139) Уголъ равный данному углу *n* раздѣлить на 9 частей.

140) Обозначте булавками на доскѣ уголъ равный образуемому ребрами доски и раздѣлите его пополамъ, съ помощію маленькаго кусочка бумаги.



Разскажите какъ нужно сдѣлать эту задачу?

— Сначала снимемъ на бумагу уголъ, согнемъ его вдвое, какъ дѣлали раньше и затѣмъ, расправивъ, приложимъ къ

*) Пріемъ этотъ усвоивается практикой. Учитель самъ показываетъ какъ надо складывать, а затѣмъ какъ можно чаще упражняетъ дѣтей въ этомъ и поправляетъ ошибки самъ или пользуясь помощію сильныхъ учениковъ, раньше другихъ усвоившихъ пріемъ.

обозначенному на доскѣ такъ, чтобы вершина угла на бумагѣ совпадала съ вершиной угла на доскѣ и стороны послѣдняго шли по направленію сторонъ перваго; затѣмъ на продолженіи сгибовъ разставимъ булавки, которыми и обозначится прямая, дѣлящая уголъ пополамъ.

141) Обозначить на доскѣ уголъ тремя точками и раздѣлить его на три части съ помощію маленькаго куска бумаги въ $^1/_{16}$ долю листа.

Такія же задачи продѣлываются и на дворѣ и въ полѣ съ обозначеніемъ прямыхъ бороздами и кольями.

142) Вычертить уголъ равный половинѣ угла составленнаго краями листа вашей тетради.

Что называется половиной угла?—Сколько половинъ въ цѣломъ углѣ?—Какая изъ половинъ больше?

143) Начертить уголъ равный одной трети даннаго угла.

Что называется третью угла?—Сколько третей въ цѣломъ?—Какая изъ трехъ третей больше или меньше остальныхъ? Что значитъ начертить уголъ равный одной трети цѣлаго?

144) Вычертить уголъ равный друмъ третямъ угла, образуемаго этими ребрами стола.

145) Вычертить уголъ равный $^3/_6$, $^5/_8$, $^4/_9$ и т. д. угла, образуемаго краями обложки или переплета вашей книги.

146) По углу равному половинѣ, $^1/_3$, $^1/_4$ и т. д. угла даннаго вычертить уголъ равный ему.

147) Уголъ *м* составляетъ $^2/_3$, $^3/_4$, $^5/_8$ угла *н* и $^1/_2$ угла *к*, вычертить углы равные угламъ *н* и *к*.

Во сколько половина угла меньше цѣлаго?—четверть, треть, шестая, восьмая...?

Во сколько разъ $^2/_4$ какого либо угла меньше цѣлаго угла?

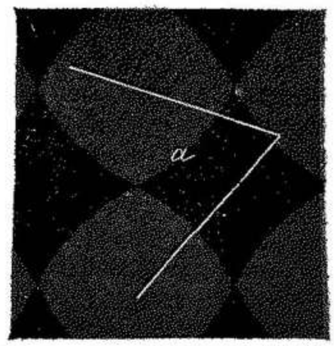
148) Вычертить уголъ втрое, вчетверо и т. д. меньшій даннаго угла.

149) Данъ уголъ *м* равный $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$ и т. д. угла *н*, вычертить уголъ *н*.

VII.

150) Во сколько разъ уголъ *а* больше угла *б* (вычерченнаго въ тетради).

Какъ можно узнать во сколько разъ уголъ *а* больше *б*? Вспомните, какъ мы узнавали во сколь-разъ одна прямая больше другой?



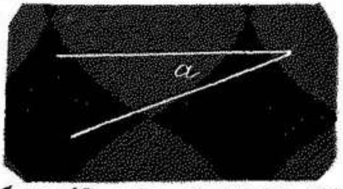
— Мы накладывали меньшую прямую на большую столько разъ сколько первая помѣстится въ послѣдней и затѣмъ остатокъ прикладывали къ меньшей прямой съ цѣлію узнать—какой части меньшей прямой онъ равняется. Затѣмъ число разъ, какое меньшая прямая помѣстилась въ большей съ частью длины меньшей, которой равняется остатокъ и покажетъ—во сколько разъ меньшая изъ данныхъ прямыхъ больше большей.

— А какъ узнать во сколько разъ уголъ *а* больше угла *б*? Какой изъ нихъ нужно наложить на какой?, Какъ будете накладывать?—Если бы большій былъ образованъ этими ребрами оконнаго отверстія, то что слѣдовало бы соблюдать при наложеніи меньшаго на большій?

Исполните заданную задачу и отвѣтъ напишите цифрами.

151) Узнать во сколько разъ уголъ, образованный краями листа вашей тетради больше даннаго угла *а*.

152) Опредѣлить во сколько разъ одинъ изъ данныхъ угловъ меньше другаго?



153) Во сколько разъ сумма двухъ данныхъ угловъ больше третьяго угла?

154) Узнать, во сколько разъ большій изъ данныхъ угловъ больше средняго, а меньшій—меньше средняго.

VIII.

Если я проведу прямую, на ней назначу точку, и отъ этой

точки проведу прямую линію, то образуются ли при этомъ углы и сколько?

— Сдѣлайте у себя въ тетради то, что сдѣлано мною на доскѣ, и отъ взятой на прямой точки проведите прямую такъ, чтобы верхній уголъ (или лѣвый) былъ больше нижняго (или праваго)

Теперь сдѣлайте тоже самое построеніе только такъ, чтобы верхній уголъ былъ меньше нижняго.

155) Провести наклонную влѣво прямую въ $1^1|_2$ в. длиною; на ней назначить точку и отъ этой точки провести прямую, которая бы составляла съ прежде проведенной прямой два равные угла.

Какъ вы проводили въ углахъ прямую, составляющую съ сторонами его два равные угла, или какъ вы дѣлили уголъ пополамъ?

— Мы снимали величину угла на листокъ бумаги и затѣмъ снятый уголъ складывали вдвое т. е. такъ, чтобы стороны его совпадали, начиная отъ вершины, по всей длинѣ.

— Если вамъ данъ будетъ очень большой уголъ, стороны котораго составляютъ почти прямую, то тогда какъ вы будете дѣлить пополамъ уголъ?—Ну а если большой уголъ увеличился до того, что обѣ стороны его стали составлять одну прямую *)?

— И здѣсь мы поступимъ точно также: возьмемъ листокъ бумаги съ прямымъ краемъ и затѣмъ сложимъ его такъ, чтобы раздѣленныя сгибомъ части прямой совпадали. Прямая сгиба и раздѣлить уголъ пополамъ т. е. составитъ съ первоначальною прямою углы равные между собою.

Теперь проведите прямую (отъ назначенной точки) составляющую съ прежде проведенной два равныя угла.

Скажите, отъ какого конца прежде проведенной прямой только что проведенная отходитъ дальше, или точнѣе, къ какому концу она наклонена—къ лѣвому или къ правому?

— Къ обоимъ концамъ она одинаково наклонна и вообще

---

*) Если бы ученикамъ показалось не яснымъ, какъ прямая можетъ быть принята за уголъ, то слѣдуетъ уяснить это показывая движенія малки, обусловливающія уменьшеніе и увеличеніе угла до двухъ прямыхъ.

проведена *прямо*, по отношенію къ прямой, прежде проведенной.

Такія прямыя мы будемъ называть *прямостоящими* или *перпендикулярными* къ прежде проведенной прямой

Проведите нѣсколько какихъ угодно прямыхъ, возьмите на каждой изъ нихъ по точкѣ и проведите изъ этихъ точекъ *прямостоящія* прямыя т. е. прямыя, дѣлающія съ прежде проведенными равные углы.

Равны ли углы каждой изъ вычерченныхъ паръ между собою?—А посмотрите, углы которой больше угловъ другихъ паръ?

— Углы всѣхъ паръ равны.

— Не можетъ ли кто изъ васъ провести двѣ прямыя такъ, какъ мы сейчасъ проводили т. е. чтобы одна прямая съ другою образовала два равные угла, но чтобы эти углы были больше или меньше такихъ же угловъ, построенныхъ уже.

Если я возьму эту проволоку и, уперевъ одинъ конецъ ея въ другую проволоку, построю два равныхъ угла, то будутъ ли они равными тѣмъ, которые вами вычерчены?

Стало быть, всякій разъ, когда проводится *прямостоящая* прямая къ какой либо другой прямой, то образуются два равные угла, которые всегда сохраняютъ одну и туже величину, если получаются такимъ же построеніемъ.

Эти углы называются *прямыми* и образуются *прямостоящими*.

Покажите мнѣ на предметахъ въ классѣ прямые углы, — Какъ узнать дѣйствительно ли это углы прямые? *К* подойди къ доскѣ и покажи на ней какой нибудь прямой уголъ и затѣмъ покажи намъ, что указанный тобою уголъ дѣйствительно прямой.

В. разскажи какъ можно показать что указанный уголъ прямой?

156) Вычертить *одинъ* прямой уголъ.

Еслибы у васъ была широкая линейка или вотъ хоть такой треугольникъ, у которыхъ нѣкоторыя изъ реберъ составляютъ между собою прямые углы, то нельзя ли было бы рѣшить задачу проще?

Какъ?

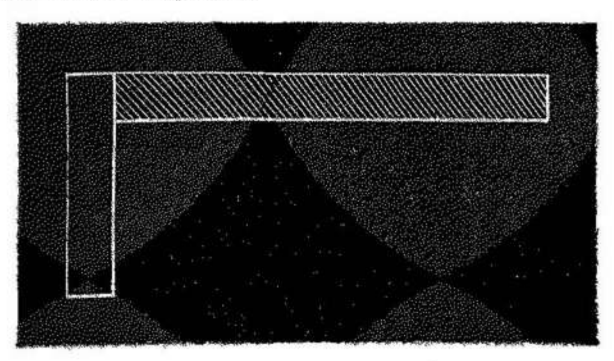
Къ слѣдующему уроку каждый изъ васъ сдѣлаетъ для себя изъ толстой бумаги или папки такой треугольникъ какъ этотъ т. е. такой, у котораго одинъ уголъ былъ бы прямой *).

---

*) Независимо отъ этаго ученикамъ слѣдуетъ раздать правильно вырѣзанные треугольники изъ дерева или хотя бы изъ папки, преимущественно англійской, болѣе всякой другой прочной.

Столяры и плотники для обозначенія прямого угла употребляютъ *наугольникъ*, показанный на фиг.

Вычертите уголъ меньшій прямого, большій прямого. — Незнаетъ ли кто изъ васъ, какъ называется уголъ меньшій прямаго и большій прямаго?



Меньшій называется *острымъ*, а большій *тупымъ* п. ч. первый и съ виду выглядитъ острымъ, а второй тупымъ.

157) Начертите три угла, изъ которыхъ одинъ *прямой*, другой, *тупой* и третій *острый*.

158) Провести прямую черту въ 1 в. длиною; на ней назначить точку и отъ этой точки вверхъ провести прямостоящую въ $^1/_2$ верш. длиною.

159) Провести прямую черту наклонную вправо въ $1^1/_2$ в. длиною; отъ верхняго конца ея въ низъ, а отъ нижняго въ верхъ провести прямостоящія въ 1 в. длиною.

160) Вычертить острый уголъ со сторонами въ 1 в. длиною и отъ концевъ сторонъ въ одну сторону, или въ разныя стороны провести прямостоящія въ вершокъ же длиною.

161) Вычертить острый уголъ со сторонами въ $1^1/_2$ верш. длиною, назначить на каждой изъ нихъ по точкѣ и отъ нихъ внутрь угла провести прямостоящія къ сторонамъ угла. (Длина прямостоящихъ опредѣлится точкой ихъ пересѣченія).

162) Провести прямую, на ней назначить точку, сверху прямой и внѣ ея назначить другую точку и затѣмъ отъ точки на прямой провести къ ней прямостоящую такъ, чтобы она проходила черезъ поставленную вверху точку.

Эту задачу мы сдѣлаемъ на нашей большой доскѣ. Б, выйди къ доскѣ, а всѣ остальные слѣдите—вѣрно ли онъ сдѣ-

лаетъ. — Проведи прямую четверти въ три длиною, назначь на ней точку, поставь сверху другую точку, а теперь попробуй рѣшить задачу.—Что тебѣ нужно для проведенія прямостоящей?—Вотъ тебѣ большой треугольникъ.—Невыходитъ? Постойте, я поставлю точку въ другомъ мѣстѣ. Ну, теперь можно провести требуемую прямостоящую?

А нельзя ли поставить точку такъ, чтобы черезъ нее могла быть проведена прямостоящая, выходящая изъ точки на прямой?—Гдѣ же ее надо поставить? — Б. попытайся поставить такую точку.—Попробуй черезъ нее провести прямостоящую, выходящую изъ точки на прямой.—А какъ поставить требуемую точку вѣрно, такъ чтобы неприходилось ее перестававливать?—Возьми треугольникъ и поставь такую точку.

Теперь сдѣлайте такую же задачу у себя въ тетрадяхъ.

163) Провести прямую, на ней взять точку и вверху поставить другую точку такъ, чтобы черезъ нее могла пройти прямостоящая, проведенная изъ точки на прямой.

164) Назначить точку, подъ нею провести прямую и черезъ точку провести къ прямой—прямостоящую.

164) Провести прямую черту, влѣво отъ нея и нѣсколько выше ея поставить точку и черезъ нее провести прямостоящую къ прямой (ея продолженію).

Какъ надо приложить треугольникъ для того, чтобы провести требуемую прямостоящую?

165) Назначить точку, влѣво отъ нея провести отвѣсную прямую, по срединѣ отвѣсной назначить еще точку и изъ первой точки провести прямостоящую къ прямой, которая проходила бы и черезъ точку на прямой.

Эту задачу сдѣлаетъ К на доскѣ, а вы слѣдите—вѣрно ли онъ сдѣлаетъ.

Какъ надо приложить треугольникъ, чтобы провести прямостоящую отъ точки внѣ прямой? Что же, проходитъ ли прямостоящая черезъ точку на прямой?

Нельзя ли какъ нибудь подвинуть треугольникъ, чтобы прямостоящая прошла черезъ точку?

А нельзя ли назначить на прямой такую точку, черезъ которую прошла бы прямостоящая, выходящая изъ точки внѣ прямой?

166) Назначить точку, вверху отъ нея провести горизонтальную прямую черту, а на ней назначить точку, черезъ

которую прошла бы прямостоящая, выходящая изъ точки внѣ прямой.

Какъ нужно поставить точку, чтобы черезъ нее прошла прямостоящая, проведенная изъ точки внѣ прямой?

167) Провести горизонтальную прямую черту; сверху ея поставить точку, черезъ которую провести двѣ прямостоящія къ проведенной прямой.

Кому удалось это сдѣлать?—Нельзя ли провести три и болѣе прямостоящихъ къ одной и той же прямой?

А сколько же можно провести?

168) Провести двѣ, три, четыре и т. д. прямыя въ различныхъ положеніяхъ, назначить какую нибудь точку и провести черезъ нее по прямостоящей къ каждой изъ проведенныхъ прямыхъ.

IX.

Изъ точки, назначенной внѣ прямой, сколько можно провести къ ней прямостоящихъ? А нельзя ли отъ той же точки провести нѣсколько прямыхъ не прямостоящихъ, но пересѣкающихъ прямую или доходящихъ до нея? Незнаете ли какъ эти прямыя называютъ по отношенію къ прежде проведенной?

Ихъ называютъ *наклонными* къ этой прямой—запомните это.

Потомъ запомните еще, что точку, въ которой прямостоящая или наклонная встрѣчаются съ той прямой, къ которой онѣ проводятся мы будемъ называть *основаніемъ* прямостоящей и наклонной.

169) Проведите прямую, внѣ ея назначте точку и отъ нея проведите *прямостоящую* и три *наклонныхъ* къ прямой.

170) Провести горизонтальную прямую, внѣ ея назначить точку и отъ нея провести прямостоящую и наклонную къ прямой.

Какъ вы думаете, что длиннѣе прямостоящая или наклонная? Какъ въ этомъ убѣдиться?

— Измѣреніемъ.

171) Изъ точки внѣ прямой провести прямостоящую и наклонную, которая была бы короче или равною прямостоящей.

Кому удалось сдѣлать предложенную задачу? Проведите изъ данной точки нѣсколько наклонныхъ, возьмите нѣсколько точекъ и изъ нихъ проведите по одной прямостоящей и по нѣскольку наклонныхъ и посмотрите не будетъ ли такого случая, когда наклонная равна или короче прямостоящей, *проведенной изъ той же точки?*

172) Изъ точки, взятой внѣ прямой провести къ ней прямостоящую и двѣ наклонныя, изъ которыхъ одна отстояла бы дальше отъ прямостоящей чѣмъ другая.

Какъ вы думаете, которая изъ наклонныхъ больше: ближайшая къ прямостоящей или та, которая дальше отъ нея? Какъ убѣдиться въ этомъ?

X.

К проведи на доскѣ прямую черту и внѣ ея поставь точку.—Какъ узнать *разстояніе* этой точки до прямой? — Это разстояніе нужно считать по какой прямой—наклонной или прямостоящей?—Отчего прямостоящей?—Если кому либо нужно, отъ мѣста внѣ дороги, выйти на дорогу, то по какому направленію онъ скорѣе дойдетъ?

Но есть другая причина, по которой разстояніе точки отъ прямой мѣрится по прямостоящей.

Если мнѣ нужно передать вамъ какое разстояніе отъ такого то села до дороги, и если бы я считалъ разстояніе по одной изъ наклонныхъ, то знали бы вы, какъ далеко дорога проходитъ отъ села? Вѣдь наклонныя могутъ быть очень большими, смотря по отстоянію отъ прямостоящей; если же я скажу разстояніе, которое буду считать по прямостоящей, то, такъ какъ прямостоящая только одна и имѣетъ опредѣленную и самую короткую длину, то вамъ понятно какъ велико разстояніе и вы всегда можете повѣрить — вѣрно ли я мѣрилъ разстояніе.

173) Провести прямую, внѣ ея поставить одну или нѣсколько точекъ и измѣрить отстояніе ихъ отъ прямой (отв. письменный).

174) Вычертить острый уголъ съ неравными сторонами и

*

измѣрить разстояніе концевъ сторонъ отъ противолежащихъ сторонъ (отв. письменный).

175) Провести прямую, вверху поставить точку и отъ нея провести наклонную равную или меньшую прямостоящей.

176) Провести прямую, внизу ея поставить точку и отъ нея провести наклонную въ $1^1/_2$ раза больше прямостоящей.

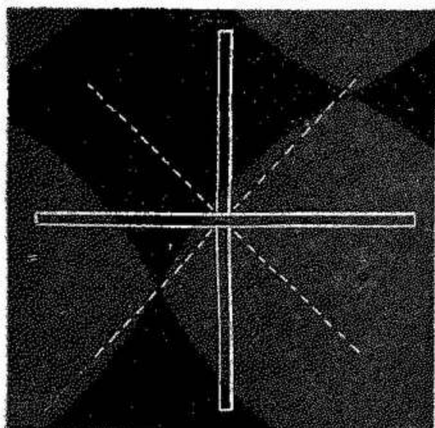
177) Вычертить острый уголъ и къ верхней сторонѣ его провести прямостоящую въ 1 верш. длиною.

178) Провести прямую въ 1 вершокъ длиною и поставить точку отстоящую отъ обоихъ концевъ ея на $1^1/_2$ вершка.

179) Провести горизонтальную прямую въ 1 верш. длиною и поставить вверху точку такъ, чтобы она отстояла отъ лѣваго конца прямой на разстояніи равномъ $^1/_2$ вершка, а отъ праваго на разстояніи равномъ $1^1/_2$ вершка.

XI.

Установите на доскѣ эту проволоку въ отвѣсномъ положеніи; натяните черезъ какую-нибудь точку прямостоящую прямую нитку къ отвѣсной. Который изъ концевъ нитки находится выше, и какой ниже? Какая же это прямая? Стало быть, какой уголъ составляютъ между собою отвѣсная съ горизонтальной?



Можетъ ли быть прямостоящая къ наклонной—горизонтальной или отвѣсной? Попытайтесь кто нибудь установить прямостоящую къ наклонной, которая была бы горизонтальною или отвѣсною.

Если бы объясняемое здѣсь показалось темно ученикамъ, то можно показать имъ крестъ изъ проволоки или спичекъ, части котораго составляютъ прямые углы. При уклоненіи отвѣсной уклоняется и горизонтальная.

Если вы установили отвѣсную прямую, то какъ получить

горизонтальную? А если установлена горизонтальная, то какъ получить отвѣсную?—Стало быть, отвѣсная есть прямостоящая къ горизонтальной, а послѣдняя прямостоящая къ отвѣсной.

— Можно скрѣпить двѣ рейки такимъ образомъ, чтобы одна изъ нихъ была прямостоящею къ другой; тогда стоитъ провести въ отвѣсное положеніе одну изъ нихъ, то другая будетъ въ горизонтальномъ положеніи.

Если проведена отвѣсная, то какъ провести горизонтальную съ помощію треугольника?

XII.

Покажите нѣсколько прямыхъ угловъ. Часто ли на предметахъ окружающихъ насъ можно найти прямой уголъ? — Какъ назначаютъ прямой уголъ мастеровые, когда имъ это бываетъ нужно—вспомните мы объ этомъ раньше говорили.

Если бы у насъ не было наугольника или треугольника, то какъ могли бы мы получить прямой уголъ? А всѣ ли прямые углы одинаковы по величинѣ? Если я скажу—вычертить прямой уголъ, то можно ли уже поэтому одному знать что надо сдѣлать? — А если я скажу: вычертить острый или тупой уголъ, то можете ли вы поэтому вычертить такой уголъ какой мнѣ нужно?—Я начерчу на оборотѣ доски прямой уголъ, тупой и острый и скажу вамъ—вычертите прямой, тупой и острый углы. Знаете ли вы величину требуемаго прямаго?—Если только у себя на тетради вы начертили прямой уголъ, то онъ будетъ навѣрно такой, какой я здѣсь начертилъ на оборотѣ доски? А тупой и острый?

— Тупой и острый можно вѣрно начертить только тогда, если его величину можно снять потому что острые и тупые углы бываютъ различны по величинѣ.

— Ну, а если бы для тупыхъ и острыхъ угловъ нашлась какая либо мѣра, подобная тѣмъ, которыя существуютъ для опредѣленія длины прямыхъ, то нужно ли было бы и тогда снимать величину угла для того, чтобы можно было его вычертить?

Какъ вы думаете, можно ли углы мѣрить вершками, аршинами и т. д.?—Что же мѣрится вершками и аршинами? Стало быть, мѣрами длины (прямыми опредѣленной длины) можно измѣрять только длину прямыхъ.

А какая мѣра нужна для измѣренія угловъ? — Если бы у насъ нашелся уголъ опредѣленной величины, то могли бы мы мѣрить имъ всѣ углы?—Какъ же бы мы мѣрили?

— Мы узнали бы сколько разъ этотъ уголъ помѣщается въ измѣряемомъ.

— Ну, а если бы измѣряемый былъ меньше мѣры — тогда какъ?—Какъ поступали мы, когда нужно было аршиномъ измѣрить край листа вашей тетради?

— Тогда было нужно узнать—какую часть мѣры—аршина напр. составляетъ измѣряемая прямая.

— Какъ вы думаете: какой уголъ всего удобнѣе взять за мѣру угловъ?—Отчего прямой?—Что удобнѣе аршинъ, какъ мѣра длины, или прямой уголъ, какъ мѣра угловъ, какъ мѣра растворенія между прямыми?—Почему?

— Потому что прямой уголъ легко всякому сдѣлать и повѣрить, а аршинъ самъ не сдѣлаешь, не имѣя какой нибудь мѣры—сажени, четверти и т. п.

184) Измѣрить выставленный или вычерченный на доскѣ тупой уголъ, при помощи прямого угла.

Что нужно имѣть для исполненія заданнаго? Гдѣ же у васъ вѣрно назначенный прямой уголъ?—Какъ надо наложить прямой уголъ треугольника на измѣряемый уголъ?

— Такъ, чтобы вершина прямаго угла совмѣстилась съ вершиной измѣряемаго и одна изъ сторонъ прямого угла прилегали бы къ сторонѣ измѣряемаго.

— Затѣмъ будетъ остатокъ—острый уголъ.—Какъ же его измѣрить?

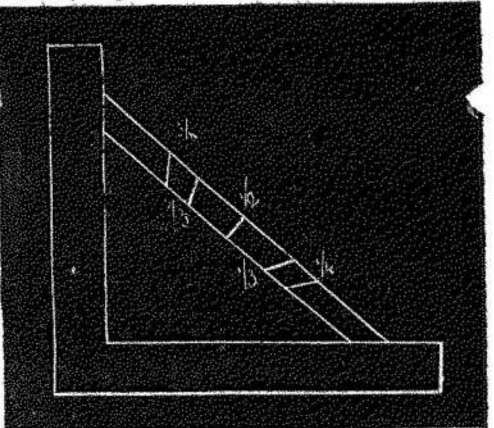
— Нужно узнать какую часть прямаго составляетъ этотъ остатокъ, и для этаго, проведя черту по сторонѣ прямаго угла, лежащей между сторонами измѣряемаго, наложить прямой уголъ еще разъ такъ, чтобы вершина его совпадала съ вершиной измѣряемаго и одна изъ сторонъ прилагала бы къ прочерченной чертѣ. Тогда уже другая сторона измѣряемаго угла пройдетъ между сторонами прямаго, и если она проходитъ по срединѣ между послѣдними, то это значитъ, что остатокъ равняется половинѣ прямаго угла, а весь тупой уголъ, стало быть, равняется $1\frac{1}{2}$ прямыхъ угла.

Если послѣдняя сторона измѣряемаго угла составляетъ съ стороною прямаго угла въ $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_6$ и т. д. прямаго, то измѣряемый тупой уголъ выходитъ въ $1^1/_3$, $1^1/_4$, $1^1/_6$ и т. д. прямаго угла.

185) Измѣрить нѣсколько тупыхъ угловъ на предметахъ въ классѣ и вычертить ихъ у себя въ тетради.

186) Измѣрить вычерченный на доскѣ острый уголъ, при помощи прямаго угла, какъ мѣры.

Такъ какъ сторона измѣряемаго остраго угла, по разстоянію которой отъ сторонъ прямаго судятъ о величинѣ его, закрывается треугольникомъ, что мѣшаетъ вѣрному опредѣленію, то вмѣсто треугольника съ прямымъ угломъ лучше употреблять наугольникъ и пользоваться, при этомъ, внутреннимъ прямымъ угломъ, а еще лучше, показаннымъ на фигурѣ *угломѣромъ*, который легко сдѣлать изъ папки или твердой бумаги самому учителю.



187) Измѣрьте нѣсколько тупыхъ и острыхъ угловъ съ помощію наугольника или угломѣра.

188) Вычертить углы въ $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_3$, $^2/_3$, $^3/_4$, $1^1/_2$, $1^1/_3$, $1^1/_4$, $1^2/_3$, $1^3/_4$ и т. д. прямаго.

XIV.

Посмотрите, я проведу нѣсколько наклонныхъ вправо... Скажите, одинаковы ли эти наклонныя по своему положенію?—Которая изъ нихъ больше другихъ наклонена вправо? А которая менѣе другихъ наклонена, которая стоитъ прямѣе другихъ?

Если бы я задалъ вамъ провести наклонную вправо точно въ такомъ положеніи какъ вотъ эта наклонная, то моглибъ

ли вы это сдѣлать?—Какъ?—Опредѣляя положеніе наклонной на глазъ легко ошибиться. А какъ провести наклонную въ точно такомъ положеніи какъ данная наклонная?

Отъ какого направленія наклонная *отклоняется?* А къ какому *наклоняется?* Недогадываетесь ли теперь?

— Нужно измѣрить уголъ, на который наклонная отклоняется отъ отвѣснаго направленія.

— Но, какъ же измѣрить уголъ когда его нѣтъ, вѣдь отвѣсной линіи не начерчено на доскѣ?

— Нужно отвѣсную прочертить, или приложить линейку къ одному изъ ея концевъ такъ, чтобы прямое ребро ея было въ отвѣсномъ положеніи: такимъ образомъ уголъ и обозначится. Затѣмъ, нужно его измѣрить и проведя сначала отвѣсную, причертить къ ней этотъ уголъ. Тогда другая (не отвѣсная) сторона его и будетъ наклонною въ требуемомъ положеніи.

— Но вѣдь тутъ вамъ прійдется употребить въ дѣло и линейку и наугольникъ или угломѣръ; а нельзя ли исполнить задачу съ какимъ либо однимъ пособіемъ? (Угломѣромъ). Какъ же тогда вы поступите?

189) Опредѣлить положеніе нѣсколькихъ наклонныхъ на данномъ рисункѣ.

190) Провести наклонныя, составляющія съ отвѣсною углы равные $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_3$ и т. д. прямаго.

Какъ опредѣлить положеніе наклонной по углу, который она составляетъ съ горизонтальною прямою, проведенною черезъ одинъ изъ ея концевъ?

Сдѣлать двѣ послѣднія задачи, опредѣляя положеніе наклонныхъ угломъ, составляемымъ ими съ горизонтальною.

Понятіе объ измѣреніи угловъ, при помощи прямаго — какъ мѣры прилагается и окончательно усвоивается учениками на копированіи простенькихъ прямолинейныхъ чертежей.

Вопросы для повторенія.

1) Изъ чего образуется уголъ, какъ называются прямыя его составляющія, точка, къ которой прямыя сходятся?

2) Отчего зависитъ величина угла?

3) Какія положенія можетъ имѣть уголъ?

4) Какія углы называются равными?

— Какъ надо накладывать углы, если желаемъ убѣдиться въ ихъ равенствѣ? — Что замѣчается при наложеніи неравныхъ угловъ?

5) Какъ можно снять величину угла на листокъ бумаги и малку?

6) Какъ вычертить уголъ равный данному?—Какъ обозначить уголъ равный данному рядами булавокъ на доскѣ, или рядами точекъ въ тетради?

7) Какъ раздѣляется уголъ на части?

8) Какимъ образомъ вычерчивается уголъ равный суммѣ и разности данныхъ угловъ?

9) Опишите—какъ вы будете строить уголъ въ нѣсколько разъ большій даннаго?

10) Какъ раздѣлить уголъ на 2, 4, 3, 6, 8 и т. д. равныхъ частей? — Какъ вычертить уголъ въ 2, 3, 4 и т. д. разъ меньшій даннаго?

11) Какъ опредѣлить—во сколько разъ одинъ уголъ больше или меньше другаго?

12) Что называется прямымъ угломъ—Какъ можно сдѣлать прямой уголъ изъ бумаги?

13) Какъ вычертить прямой уголъ?

14) Что называется *прямостоящею* (*перпендикуляръ*) и *наклонными* къ какой либо прямой?

15) Какъ проводится прямостоящая къ прямой изъ точки, взятой на ней, а также изъ точки, взятой внѣ ея?

16) Если изъ точки, взятой внѣ прямой провести къ ней прямостоящую и нѣсколько наклонныхъ, то которая изъ послѣднихъ прямыхъ будетъ самою короткою?—Какія изъ проведенныхъ наклонныхъ выходятъ большими?—Нѣтъ ли между наклонными равныхъ и въ какомъ разстояніи они проходятъ отъ основанія прямостоящей.

17) Сколько прямостоящихъ можно провести къ прямой изъ точки взятой на ней; а сколько прямостоящихъ къ прямой можно провести изъ точки взятой внѣ ея?

18) Какъ измѣряется разстояніе отъ точки до прямой?

19) Какой уголъ составляютъ между собою горизонтальная и отвѣсная? — Какъ построить горизонтальную по отвѣсной и наоборотъ?

20) Какая мѣра существуетъ для измѣренія угловъ и какъ измѣряются углы?

21) Какъ опредѣляется положеніе наклонныхъ прямыхъ?

Параллельныя прямыя.

I.

Параллельныя прямыя опредѣляются, какъ равностоящія и уже при расширеніи понятія обнаруживается для учениковъ, что эти прямыя, при *встрѣчѣ съ какою либо сѣкущею*, образуютъ съ нею равные соотвѣтственные углы.

Прежде всего пары параллельныхъ выдѣляются учениками изъ нѣсколькихъ *паръ прямыхъ*, между которыми есть нѣсколько непараллельныхъ; затѣмъ вниманіе ихъ направляется на наблюденіе и обнаруженіе того свойства, что параллельныя равно—отстоятъ другъ отъ друга на всемъ своемъ протяженіи. — Съ этою цѣлію задаются вопросы:

— Чѣмъ отличаются выдѣленныя пары отъ остальныхъ?

— Черты выдѣленныхъ паръ не сближаются, а идутъ другъ отъ друга на одномъ и томъ же разстояніи, а черты остальныхъ паръ въ одну какую нибудь сторону сближаются, а въ противуположную удаляются другъ отъ друга, поэтому первыя могутъ быть названы *равноотстоящими*, а вторыя *неравноотстоящими*.

Послѣ этаго вывода ученикамъ сообщается общепринятое названіе этаго рода прямыхъ и съ этихъ поръ равноотстоящія прямыя называются — *параллельными*, а неравноотстоящія — *непараллельными*.

Теперь приступаютъ къ уточненію и расширенію, выдѣленнаго изъ нагляднаго разсмотрѣнія, понятія.

Преподаватель вычерчиваетъ нѣсколько паръ прямыхъ чертъ, между которыми есть и пары параллельныхъ прямыхъ и спрашиваетъ: нѣтъ ли между этими парами прямыхъ чертъ—параллельныхъ? — Покажите, какія изъ нихъ непараллельны.

Но какъ убѣдиться въ справедливости того, что вы сказали: какъ доказать что указанныя вами черты дѣйствительно параллельны?

— Измѣреніемъ разстоянія между прямыми въ различныхъ мѣстахъ.

— Гдѣ, какъ и чѣмъ нужно измѣрить разстояніе?—Можно ли измѣрить разстояніе кривою проволокою или ослабленнымъ шнуромъ?—Какія разстоянія вы уже научились измѣрять?

— Разстояніе между двумя точками, и между точкою и прямою.

— Если взять на одной изъ прямыхъ, наприм. на верхней точку и измѣрить разстояніе ея отъ другой прямой, то можно ли поэтому узнать на какомъ разстояніи идетъ верхняя прямая отъ нижней въ томъ мѣстѣ гдѣ взята точка? — А можно ли поэтому одному разстоянію судить—параллельны ль прямыя?—Такъ, какъ же вы мнѣ докажете, что вычерченныя на доскѣ прямыя параллельны между собою?

— *Мы возьмемъ нѣсколько точекъ на одной изъ прямыхъ и измѣримъ разстояніе ихъ отъ другой прямой. Если всѣ разстоянія окажутся равными—значитъ прямыя параллельны, а если неравными — значитъ прямыя непараллельны.*

— Установите этотъ прутъ (или натянутую нитку) такъ, чтобы двѣ какія либо точки его напр. концы находились на равномъ разстояніи отъ этой прямой черты.—Будетъ ли тогда прутъ параллеленъ чертѣ?—А можетъ быть найдутся на немъ точки, которыя будутъ дальше отстоять отъ черты чѣмъ концы?

— Нѣтъ, всѣ точки на прутѣ равно отстоятъ отъ черты—стало быть прутъ параллеленъ чертѣ.

Установите прутъ такъ, чтобы концы его не равно отстояли отъ черты. Увѣрены ли вы въ томъ, что въ этомъ случаѣ прутъ не параллеленъ чертѣ?

— Да, потому что въ двухъ мѣстахъ уже мы открыли неравныя разстоянія между прямыми, а параллельныя прямыя идутъ вездѣ на равномъ разстояніи.

191) Вычертить прямую, и затѣмъ другую прямую параллельную первой.

Какъ вы исполнили эту задачу?

— Мы провели прямую, затѣмъ поставили двѣ точки въ равномъ отъ нея разстояніи и черезъ эти точки провели прямую, которая и будетъ параллельною первой прямой, потому что всѣ точки, взятыя на второй прямой будутъ на такомъ же разстояніи отъ первой прямой, какъ и первыя двѣ точки.

— Продолжите вычерченныя вами параллельныя прямыя какъ можно дальше, возьмите на продолженіяхъ точки и измѣ-

ряйте отстояніе ихъ отъ продолженія другой. — Какія получаются разстоянія?

— А если бы вы продолжили ваши параллельныя еще дальше, то — какъ вы думаете — измѣнится ли тогда разстояніе между прямыми? Значитъ, *какъ бы далеко мы не продолжали двѣ параллельныя прямыя они всегда будутъ идти одна отъ другой на равномъ разстояніи—стало быть останутся параллельными.*

А если бы мы продолжили въ обѣ стороны двѣ не параллельныя прямыя, то могутъ ли ихъ продолженія сдѣлаться параллельными?

— Нѣтъ, не параллельныя прямыя въ одну сторону сходятся, а въ другую расходятся т. е. въ одну сторону разстояніе между ними дѣлается все больше и больше, а въ противуположную уменьшается; поэтому, по достаточномъ продолженіи въ послѣднемъ направленіи непараллельныя прямыя неминуемо *пересѣкаются.*

— А могутъ ли пересѣкаться параллельныя прямыя?

— Нѣтъ, потому что въ какую бы сторону мы не продолжали эти прямыя разстояніе между ними не уменьшается, а остается тѣмъ же.

— Во всѣхъ ли парахъ параллельныхъ разстояніе между прямыми одинаково?

— Разстояніе между параллельными можетъ быть различно.

192) Провести прямую и затѣмъ другую параллельную первой, въ разстояніи отъ нея $^1/_2$ вершка.

193) Провести прямую, внѣ ея поставить точку и черезъ нее провести прямую параллельную прежде проведенной прямой.

194) Вычертить острый уголъ, на одной изъ его сторонъ взять точку и черезъ нее, параллельно къ другой сторонѣ, провести прямую.

195) Вычертить два угла съ параллельными сторонами, и отверстіями обращенные въ одну сторону.

196) Построить уголъ и затѣмъ другой, съ параллельными сторонами, обращенный отверстіемъ въ противуположную съ первымъ сторону.

197) Провести три параллельныя между собою прямыя такъ, чтобы разстояніе между первою и второю было вдвое больше разстоянія между второю и третьею.

II.

Покажите нѣсколько прямыхъ, которыя были бы параллельны этой нити отвѣса.

Въ какомъ положеніи находятся всѣ указанныя вами прямыя?

— Въ отвѣсномъ положеніи.

— Установите вотъ эту прямую проволоку такъ, чтобы она имѣла горизонтальное положеніе и была бы въ тоже время параллельна какой нибудь отвѣсной прямой.—Отчего горизонтальная прямая не можетъ быть параллельною отвѣсной?

— Оттого что первая по достаточномъ продолженіи пересѣкается съ второю.

— А нельзя ли провести или установить наклонную, которая была бы параллельною отвѣсной?—Проведите или установите нѣсколько отвѣсныхъ прямыхъ и посмотрите не будутъ ли онѣ пересѣкаться по достаточномъ продолженіи?

Покажите, что эти три отвѣсныя ребра шкапа параллельны.

И такъ, *всѣ отвѣсныя прямыя параллельны между собою, не могутъ быть параллельны ни горизонтальнымъ, ни наклоннымъ.*

Протяните нѣсколько нитокъ въ горизонтальномъ положеніи и посмотрите не будутъ ли эти прямыя параллельны между собою?—Нельзя ли провести нѣсколько горизонтальныхъ прямыхъ такъ, чтобы онѣ не были параллельными? Проведите наклонную прямую, параллельную горизонтальной?

Всѣ ли отвѣсныя параллельны между собою?—А горизонтальныя?

— А наклонныя? — Проведите двѣ наклонныя, параллельныя между собою и двѣ другія—непараллельныя.

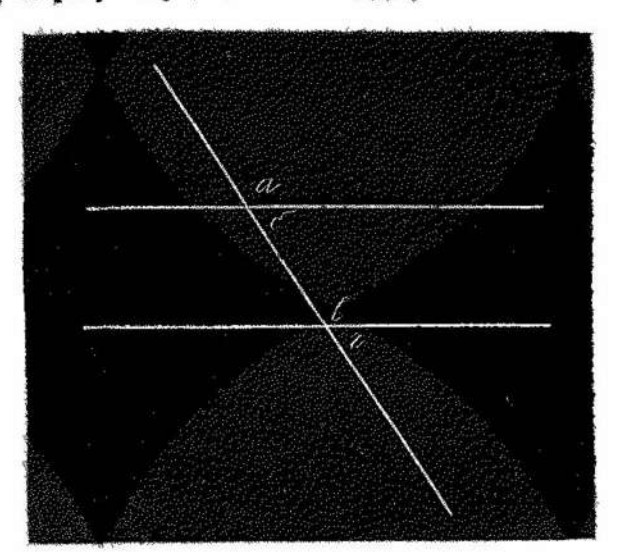
Если вы держите ваши тетради прямо, то какое положеніе имѣютъ боковые края листовъ? (отвѣсное), а верхній и нижній края? (горизонтальное). — Если вы проведете у себя въ тетради отвѣсныя черты, то какимъ краямъ листа онѣ должны быть параллельны?—А горизонтальныя?

Стало быть—*вѣрно проведенныя отвѣсныя черты въ тетради должны быть параллельны между собою и боковымъ краямъ листа (если тетрадь вѣрно обрѣзана), а горизонтальныя также параллельны между собою, а также верхнему и нижнему краямъ листа.*

III.

Провести двѣ параллельныя прямыя и затѣмъ третью, которая пересѣкала бы первыя двѣ.

Сколько угловъ при этомъ образуется? — Сколько угловъ образуется отъ пересѣченія сѣкущею первой изъ параллельныхъ прямыхъ?—А со второю? — Сколько угловъ образуется по одну сторону сѣкущей? — А по другую?



Обозначте буквами *а*, *б*, *в* и *г* всѣ углы по одну сторону сѣкущей и посмотрите нѣтъ ли между отмѣченными углами равныхъ? — Какіе равны?

— Уголъ *а* равенъ углу *в*, а уголъ *б* равенъ углу *г*.

— Если бы на углахъ не было разставлено буквъ, то нельзя ли было бы какъ нибудь описать, опредѣлить углы, которые равны между собою?—Всмотритесь, куда обращены отверзтія названныхъ равныхъ угловъ (*а* и *в*, *б* и *г*)? — А отверзтія не равныхъ угловъ?—Стало быть—какіе изъ угловъ лежащихъ по правую сторону сѣкущей равны?

— Углы, обращенные отверзтіями въ одну сторону.

— А по другую сторону сѣкущей, какіе углы равны?

— Углы обращенные отверстіями въ одну сторону.

— Проведите еще нѣсколько паръ параллельныхъ, пересѣченныхъ сѣкущею и посмотрите не выйдутъ ли и тамъ углы, обращенные отверстіями въ одну сторону равными? — Проведите пару параллельныхъ, пересѣченныхъ сѣкущею такъ, чтобы углы, обращенные отверстіями въ одну сторону были не равными. Проведите прямую, на ней возьмите двѣ точки и черезъ нихъ проведите двѣ прямыя, составляющія съ прежде проведенной прямой равные, обращенные отверстіями въ одну сторону, углы; затѣмъ проведите другую прямую, на ней возьмите двѣ точки и черезъ нихъ проведите двѣ прямыя, образующія съ первой неравныя, обращенные отверстіями въ одну сторону, углы.—Не получили ли вы въ этихъ двухъ рѣшеніяхъ пары параллельныхъ прямыхъ? — Въ какомъ изъ рѣшеній?

— Въ первомъ—когда углы откладывали равные; во второмъ же рѣшеніи — когда откладывали не равные углы—получились прямыя не параллельныя.

— Можно ли провести двѣ параллельныя такъ, чтобы по пересѣченіи ихъ съ сѣкущею углы, обращенные отверстіями въ одну сторону были не равными?

— Нѣтъ, нельзя—они всегда выйдутъ равными.

— А нельзя ли провести двѣ прямыя, составляющія съ сѣкущею равные, отверстіями обращенные въ одну сторону, углы такъ, чтобы эти прямыя были не параллельными?

— Нельзя — эти прямыя выходятъ параллельными.

— Какъ, поэтому, можно удостовѣриться въ параллельности прямыхъ, безъ измѣренія разстояній между ними?

— *Можно провести къ нимъ сѣкущую и измѣрить углы, обращенные отверстіями въ одну сторону.*

198) Провести двѣ параллельныя прямыя, при помощи угломѣра.

Какой величины углы вы откладывали? — Не все ли равно какіе углы?—Сдѣлайте еще разъ эту задачу и отложите при этомъ прямые углы.—Какой величины вышли остальные углы?

— Также прямые.

199) Провести двѣ параллельныя прямыя, при помощи треугольника.

200) Провести двѣ пересѣкающіяся прямыя, внѣ ихъ взять точку и черезъ нее провести еще двѣ прямыя, параллельныя къ первымъ, посредствомъ линейки и треугольника.

201) Провести двѣ непараллельныя прямыя и затѣмъ еще двѣ прямыя параллельныя первымъ и идущія отъ нихъ въ разстояніи $^1/_2$ вершка.

Вопросы для повторенія.

1) Что называли мы *параллельными* прямыми?—Какъ узнать параллельныя прямыя?

2) Какъ построить прямую параллельную данной прямой?

3) Какъ провести прямую черезъ данную точку параллельно какой нибудь прямой?

4) Какую прямую называли мы *сѣкущею?*

5) Какіе углы при пересѣченіи параллельныхъ сѣкущею оказываются равными?

6) Всегда ли эти углы бываютъ равными при параллельности прямыхъ?

7) Не могутъ ли эти углы быть равными и при не параллельныхъ прямыхъ? — Значитъ, что дѣлаетъ углы эти равными?

— А что ведетъ за собою равенство угловъ, обращенныхъ отверстіями въ одну сторону?

8) Какъ можно построить параллельныя, безъ откладыванія разстояній?

Объ окружности и дугахъ.

Преподаватель вычерчиваетъ на доскѣ нѣсколько прямыхъ и кривыхъ линій и задаетъ слѣдующій рядъ вопросовъ:

Какія линіи проведены на доскѣ?—Сколько прямыхъ и сколько кривыхъ?—*К* покажетъ всѣ прямыя, а *В* всѣ кривыя линіи.—Сравните прямую съ кривою и укажите чѣмъ отличается первая отъ послѣдней?

— *Прямая* идетъ все въ одномъ и томъ же направленіи—

все въ одну сторону, а *кривая* заворачиваетъ то вправо, то влѣво, то вверхъ, то внизъ.

Затѣмъ, вычерчивается рядъ кривыхъ различной кривизны, изъ которыхъ нѣкоторыя имѣютъ весьма малую—едва замѣтную — кривизну, а другія имѣютъ замѣтную, большую кривизну и тѣмъ рѣзко отличаются отъ прямыхъ.

Кто нибудь изъ васъ возьметъ линейку или нитку и узнаетъ которыя изъ этихъ чертъ прямыя и которыя кривыя? — Нѣтъ ли между кривыми чертами похожихъ на прямыя? — Которая изъ кривыхъ всего болѣе походитъ на прямую?—Которая изъ нихъ всего болѣе отличается отъ прямыхъ?—Присмотритесь внимательно и подумайте отчего зависитъ большее или меньшее сходство кривыхъ съ прямыми?

— Отъ изогнутости, отъ кривизны кривой; чѣмъ меньше кривизна тѣмъ кривая болѣе походитъ на прямую, и на оборотъ чѣмъ больше кривизна, тѣмъ болѣе она отличается отъ прямой.

— Вычертите одну прямую и четыре кривыхъ, изъ которыхъ первая была бы самой меньшей кривизны, вторая имѣла бы кривизну большую первой, но меньшую третьей, а четвертая имѣла бы самую большую кривизну.

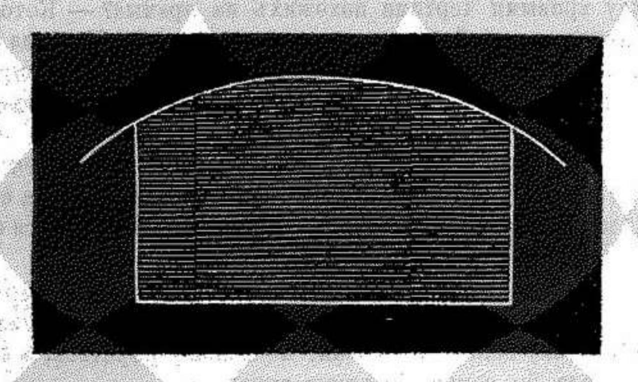
Вычертите отъ руки кривую и затѣмъ другую кривую одинаковой съ первой кривизны. Какъ вы это сдѣлаете? — Не пригодится ли вамъ здѣсь пріемъ, который вы употребляли при построеніи равныхъ угловъ?—Такъ какъ же вы это сдѣлаете?

— Мы переведемъ вычерченную отъ руки кривую на прозрачную бумагу, съ которой уже переводимъ на тетрадь. Можно сдѣлать и иначе: на вычерченную отъ руки кривую накладываемъ листикъ не толстой бумаги, на ней прочерчиваемъ просвѣчивающуюся черту, по которой потомъ разрѣзается листокъ. Край обрѣзаннаго листика можетъ служить какъ бы линейкой для проведенія чертъ кривизною одинаковыхъ съ вычерченной отъ руки кривою.

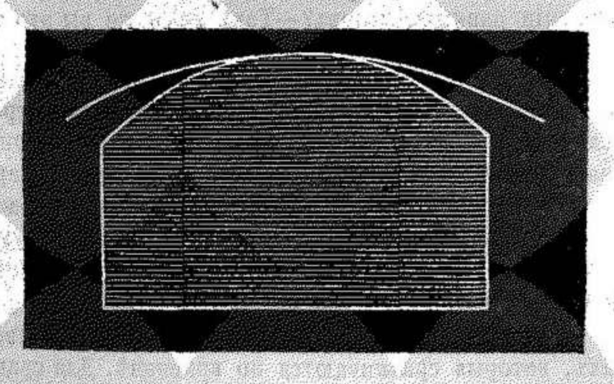
Далѣе, на классной доскѣ, вычерчивается двѣ или нѣсколько кривыхъ, которыя сравниваются по кривизнѣ. Для сравненія одна изъ проведенныхъ чертъ калькируется (снимается)

на листѣ не толстой бумаги; по ней листъ обрѣзывается и затѣмъ, обрѣзанный такимъ образомъ край, представляющій кривую совершенно одинаковой кривизны съ тою кривою, съ которой снята черта — прикладываютъ къ другой кривой такъ, чтобы черты соприкасались въ одной точкѣ.

Если кривой край листа, при такомъ приложеніи, совмѣстился съ кривой, на которую его накладывали, то это показываетъ, что кривизна послѣдней одинакова съ кривизной той кривой, по которой обрѣзанъ листъ;

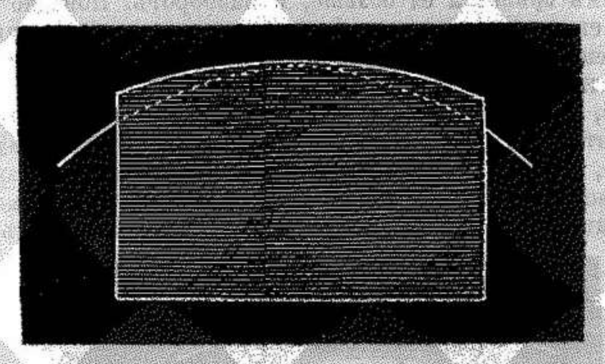


если снятая кривая располагается внутри кривой, къ которой ее прилагаютъ, то это показываетъ что кривизна первой больше нежели кривизна второй;

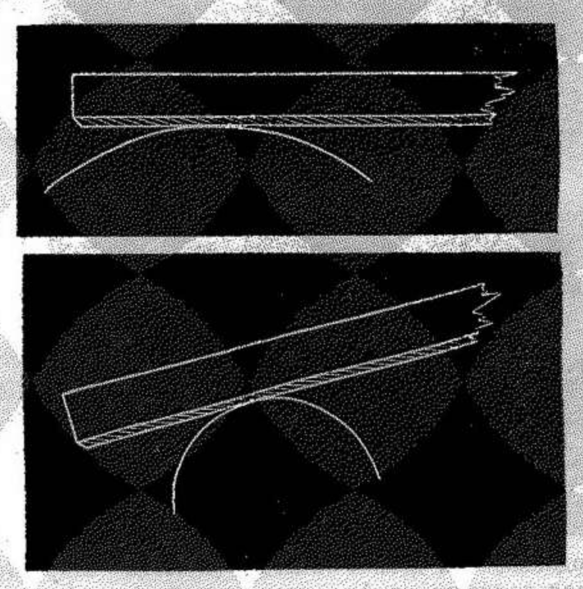


если же, наоборотъ, снятая кривая располагается внѣ

кривой, къ которой ее прикладываютъ, то это показываетъ что кривизна первой меньше кривизны послѣдней.



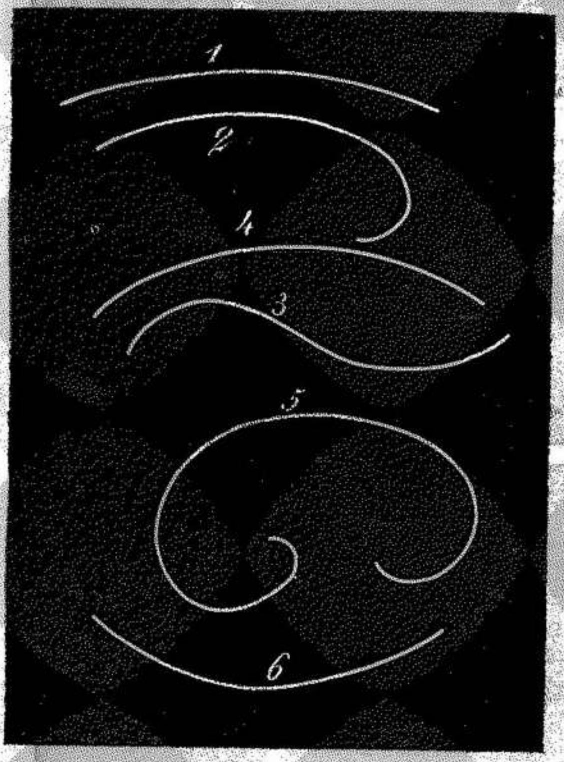
При помощи этого пріема опредѣляется относительная кривизна нѣсколькихъ данныхъ кривыхъ. Когда приведенный пріемъ достаточно усвоенъ учениками, имъ сообщается дру-



гой пріемъ сравненія, болѣе удобный — при помощи приложенія къ кривымъ прямой. Сущность его легко поймутъ уче-

ники усматривая, что чѣмъ болѣе отходитъ кривая отъ прямой (на одномъ и томъ же, отъ точки приложенія, разстояніи), тѣмъ кривизна ея больше, и наоборотъ. Понятно также и преимущество этаго пріема передъ прежде усвоеннымъ: здѣсь ненужно снимать на бумагу кривыя, а можно всегда пользоваться просто линейкой.

Далѣе, рядомъ вопросовъ вниманіе учениковъ обращается на то, что есть кривыя называемыя *дугами* или *круговыми кривыми*, у которыхъ кривизна вездѣ одинакова и изгибъ направляется все въ одномъ и томъ же направленіи; между тѣмъ какъ у кривыхъ вообще кривизна въ различныхъ ча-



стяхъ не одинакова и изгибъ иногда мѣняетъ направленіе. Такъ, между данными на фиг. кривыми, 2-я съ лѣваго конца имѣетъ весьма малую кривизну — почти приближается къ

прямой, а по мѣрѣ приближенія къ правому концу становится все изогнутѣе и изогнутѣе; 5-я черта имѣетъ наименьшую кривизну всрединѣ, а къ концамъ получаетъ все большую и большую кривизну; 3-я кривая имѣетъ двоякій погибъ: сначала загибается слѣва—внизъ, а потомъ слѣва же—вверхъ, и кривизна ея не одинакова: тамъ гдѣ она переходитъ отъ изгиба внизъ къ изгибу вверхъ кривизна ея очень незначительная, а къ концамъ она становится все больше и больше.

Кривыя же 1-я, 4-я и 6-я имѣютъ погибъ все въ одну сторону и вездѣ одинаковую кривизну, что обнаруживается сравненіемъ кривизны частей этихъ кривыхъ между собою, при помощи приведенныхъ выше пріемовъ.

Части дугъ, какъ имѣющія одинаковую кривизну при наложеніи совмѣщаются во всѣхъ точкахъ.

Всякая дуга, подобно прямой, можетъ быть продолжена въ обѣ стороны. По достаточномъ продолженіи въ обѣ стороны оба конца сойдутся, при чемъ образуется фигура называемая *кругомъ*, а самая кривая его образующая называется окружностью. Дуги суть части окружности.

Въ кругѣ можно поставить такую точку, которая равно удалена отъ кривой. Эта точка называется *центромъ*.

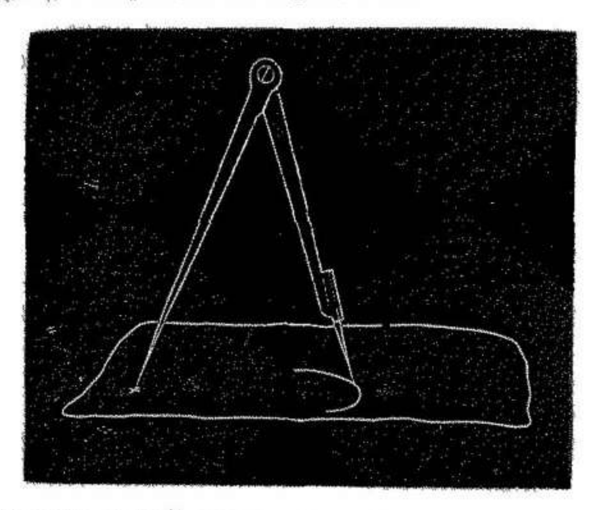
Если отъ центра до окружности провести прямыя, то всѣ онѣ будутъ равны между собою, потому что центръ равно отстоитъ отъ всѣхъ точекъ на окружности — и называется *радіусомъ*.

Радіусъ, продолженный до противуположной стороны окружности называется *поперечникомъ* или *діаметромъ*. Поперечникъ составляется изъ двухъ радіусовъ, а потому вдвое больше радіуса.

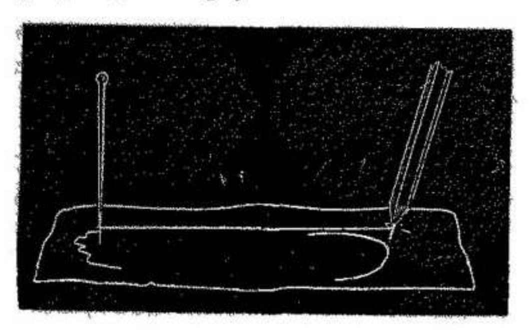
Изъ сравненія нѣсколькихъ круговъ различныхъ радіусовъ, ученики убѣждаются въ томъ, что въ большихъ кругахъ бóльшіе радіусы и наоборотъ, а также и въ томъ что, окружности и дуги большихъ круговъ и съ большими радіусами имѣютъ меньшую кривизну и наоборотъ.

Пользуясь тѣмъ свойствомъ окружности, что всѣ ея точки лежатъ въ равномъ разстояніи отъ центра можно вычертить

окружности и дуги весьма просто, при помощи циркуля или даже нитки съ булавкою и карандашемъ.



Въ первомъ случаѣ ножки циркуля разставляются на разстояніе равное длинѣ радіуса, затѣмъ одна ножка вкалывается на мѣстѣ центра, а другою, въ которой вправляется карандашъ, проводятъ черту.



Во второмъ случаѣ, на одномъ концѣ нитки привязываютъ булавку, на другомъ, въ разстояніи отъ перваго равномъ длинѣ радіуса, привязываютъ острее карандаша; затѣмъ, вкалывая булавку на мѣстѣ центра чертатъ дугу при натянутойниткѣ и прямостоящемъ карандашѣ. Далѣе ученикамъ сооб-

щается что *хордою* называется прямая соединяющая какія либо двѣ точки на окружности; *сѣкущею* называется прямая пересѣкающая окружность въ двухъ точкахъ и продолжающаяся внѣ окружности (сравненіе хорды съ сѣкущею); *касательною* называется прямая имѣющая съ окружностью только одну общую точку. Измѣряя углы, которые составляетъ касательная съ радіусомъ проведеннымъ въ точку касанія, ученики убѣждаются въ томъ, что послѣдній (т. е. радіусъ) всегда перпендикуляренъ первой (т. е. касательной *).

II.

Задачи:

202) Поставить точку, принять ее за центръ и радіусомъ равнымъ 1 вершку описать дугу.

203) Изъ данной точки на прямой, радіусомъ въ $1^1/_2$ вершка описать окружность.

204) Изъ конца прямой, какъ центра, различными радіусами описать 2, 3, 4 и т. д. одноцентренныхъ круговъ.

205) Описать двѣ пересѣкающіяся дуги.

206) Черезъ данную точку провести дугу.

207) Черезъ данную точку провести двѣ, три и болѣе дуги.

208) Провести дугу, а потомъ двѣ другія пересѣкающія первую.

209) Провести дугу и черезъ оба конца ея провести по двѣ дуги.

210) Отъ данной точки провести нѣсколько дугъ, черезъ концы которыхъ можно было бы провести прямую линію.

---

*) Изложенныя здѣсь понятія и пріемы построенія даны въ томъ видѣ, въ какомъ они должны быть высказаны самими учениками, въ результатѣ катихитической проработки этого матеріала. И здѣсь, какъ въ другихъ частяхъ курса нужно исходить изъ наблюденій нагляднаго и рядомъ вопросовъ приводить мысль ученика къ указаннымъ выводамъ.

211) Провести дугу и черезъ концы ея провести дуги обращенныя выпуклостями въ разныя стороны.

212) Изъ данной точки провести нѣсколько прямыхъ, и затѣмъ дугу пересѣкающую всѣ прямыя.

213) Изъ данной точки провести нѣсколько дугъ и затѣмъ еще нѣсколько, которыя бы пересѣкали прежде проведенныя.

214) Черезъ двѣ данныя точки провести дугу.

215) Черезъ двѣ точки провести двѣ, три, четыре, пять и т. д. дугъ.

216) Черезъ три точки провести дугу.

217) Черезъ три точки провести двѣ, три, четыре и т. д. дуги.

218) Черезъ три, четыре и т. д. точекъ провести двѣ, три, четыре и болѣе дугъ.

Здѣсь повторяются прежде усвоенные выводы:

а) Черезъ одну точку можно провести сколько угодно прямыхъ.

б) Черезъ двѣ точки можно провести только одну прямую.

в) Черезъ три точки вообще нельзя провести прямую и выводятся новыя положенія:

г) Черезъ три точки, взятыя на дугѣ нельзя провести прямой линіи, каково бы ни было ихъ положеніе.

д) Черезъ одну точку можно провести сколько угодно дугъ, равнородіусныхъ и разнорадіусныхъ.

е) Черезъ двѣ точки можпо провести множество разнорадіусныхъ дугъ.

ж) Черезъ двѣ точки нельзя провести болѣе двухъ равнорадіусныхъ дугъ, такъ какъ всѣ они сливаются.

з) Черезъ три точки можно провести только одну дугу опредѣленнаго радіуса.

и) Черезъ четыре и болѣе точки вообще нельзя провести дугу.

219) Провести прямую и затѣмъ дугу, которая бы проходила черезъ концы прямой.

220) Вычертить уголъ и затѣмъ дугу, которая бы проходила черезъ вершину и концы сторонъ его.

221) Провести двѣ пересѣкающіяся прямыя и черезъ концы ихъ провести дугу.

222) Провести двѣ и болѣе пересѣкающихся или сходящихся прямыхъ такъ, чтобы черезъ концы ихъ можно было провести дугу.

223) Провести нѣсколько пересѣкающихся между собою дугъ такъ, чтобы черезъ концы ихъ можно было провести дугу.

224) Провести касательную къ данной дугѣ.

225) Провести двѣ касательныя между собою дуги.

226) Описать окружность и къ ней провести касательную и сѣкущую прямую изъ точки внѣ окружности.

Измѣрить углы, составляемые касательною съ радіусомъ соединяющимъ точку касанія съ центромъ. Всегда ли эти углы выходятъ прямыми?—Нельзя ли воспользоваться этимъ для проведенія касательной?

227) Къ данной окружности провести касательную и сѣкущую черезъ точку данную на окружности.

228) Къ данной окружности провести касательную и сѣкущую черезъ точку данную внутри круга.

229) Черезъ точку данную на окружности провести къ ней касательную дугу.

230) Провести дугу, которая бы касалась къ данной окружности въ двухъ, трехъ и болѣе точкахъ.

231) Къ данной окружности провести дугу, которая пересѣкала бы ее въ одной, двухъ, трехъ и т. д. точкахъ.

232) Вычертить три и болѣе окружности поресѣкающіяся въ одной точкѣ.

233) Провести прямую и дугу, и назначить точку пересѣченія первою съ послѣдней.

234) Раздѣлить прямую пополамъ.

235) Изъ точки данной внѣ прямой провести къ ней прямостоящую.

236) Изъ точки, данной на прямой возстановить къ ней прямостоящую.

237) Найти точку которая бы отстояла отъ концевъ проведенной дуги на равномъ разстояніи.

238) Найти точку отстоящую отъ концевъ проведенной дуги на различномъ (не опредѣленномъ) разстояніи *).

239) Въ данномъ углѣ вписать касательный (къ сторонамъ) кругъ.

240) Найти центръ данной дуги.

---

*) Послѣднія пять задачь составляютъ повтореніе раньше рѣшенныхъ, при помощи другихъ пріемовъ.

241) Черезъ данную точку на сторонѣ угла провести окружность, которая бы касалась обѣихъ сторонъ угла.

242) Вычертить уголъ, на каждой изъ его сторонъ взять по точкѣ и черезъ нихъ провести окружность касательную обѣимъ сторонамъ угла.

243) Провести прямую, отъ концевъ ея въ одну какую либо сторону (внизъ, вверхъ, вправо, влѣво) провести еще двѣ прямыя и ко всѣмъ тремъ провести касательную окружность.

244) Провести три прямыя, на одной изъ нихъ взять точку и черезъ нее провести окружность касательную ко всѣмъ тремъ прямымъ.

III.

По достаточномъ ознакомленіи учениковъ съ свойствами окружностей и дугъ слѣдуетъ воспользоваться этой статьей для большаго разъясненія понятія объ углахъ и уточненія пріемовъ построенія угловъ. Съ этою цѣлію, прежде всего, обращается вниманіе на условія, при которыхъ дуги могутъ быть сравниваемы по длинѣ.

Только дуги одного и того же круга и равнорадіусныя дуги могутъ быть сравниваемы по длинѣ. Это уясняется сначала опытами сравненій дугъ, посредствомъ наложенія, а потомъ указаніемъ на прежде усвоенное свойство равнорадіусныхъ дугъ — *одинаковость кривизны.* Ученики инстинктивно понимаютъ, что только кривыя одинаковой кривизны могутъ быть прикладываемы другъ въ другу и сравниваемы между собою.

Эта работа заканчивается слѣдующимъ опредѣленіемъ выработаннымъ классомъ:

Разнорадіусныя дуги не могутъ быть сравниваемы по длинѣ потому что имѣя не одинаковую кривизну не могутъ прилегать другъ къ другу при наложеніи; дуги же одного и того же круга и равнорадіусныя дуги могутъ быть сравниваемы по длинѣ.

Равнорадіусныя дуги могутъ быть складываемы, вычитаемы

увеличиваемы въ нѣсколько разъ, раздѣляемы на части и уменьшаемы въ нѣсколько разъ.

Для упражненія учениковъ въ упомянутыхъ дѣйствіяхъ надъ равнорадіусными дугами даются соотвѣтствующія задачи.

Далѣе даются слѣдующія задачи:

Взять на кругѣ двѣ какія либо дуги и опредѣлить—которая изъ нихъ длиннѣе?

Вычертить двѣ равныя равнорадіусныя дуги, соединить концы обѣихъ дугъ хордами и опредѣлить—которая изъ хордъ выйдетъ длиннѣе?

Эта задача рѣшается подъ вліяніемъ слѣдующихъ наводящихъ вопросовъ преподавателя: Какъ вы будете рѣшать эту задачу?—Нельзя ли обойтись безъ измѣренія хордъ?—Если бы мы наложили данныя дуги одна на другую, то какъ размѣстились бы хорды?—Отчего онѣ совмѣстились бы?—Вѣдь мы знаемъ только что концы дугъ совмѣстятся при наложеніи?

Рѣшеніе задачи формулируется такъ:

Если бы мы наложили дуги одна на другую, то концы ихъ, а стало быть и концы хордъ тоже совмѣстились бы; отсюда мы заключаемъ, что обѣ хорды, (которыхъ концы совмѣстились) также совмѣстятся, потому что прямыя проведенныя черезъ двѣ точки сливаются.

Зад. Вычертить кругъ, провести въ немъ двѣ равныя хорды и опредѣлить которая изъ дугъ соединяющихъ эти хорды выйдетъ длиннѣе и на сколько?

Рѣш. Если наложимъ одну изъ хордъ на другую, то онѣ совмѣстятся и концы ихъ совпадутъ, а такъ какъ концы хордъ суть въ тоже время и концы дугъ, то и дуги совпадутъ потому что онѣ имѣютъ одинаковую кривизну.

Зад. Вычертите два равныхъ угла и изъ вершины каждаго изъ нихъ какъ центра опишите равно-радіусныя дуги между сторонами и опредѣлите — которая изъ дугъ будетъ больше?

Рѣш. Обѣ дуги оказываются равными потому, что при наложеніи угловъ одинъ на другой, стороны ихъ совмѣстятся, а потому и концы дугъ, лежащіе на одномъ и томъ же разстояніи отъ вершинъ также совпадутъ—стало быть и дуги, имѣющія одинаковую кривизну также совпадутъ.

Зад. Вычертите двѣ равныхъ равнорадіусныхъ дуги, концы каждой изъ нихъ соедините съ центрами и сравните величину образовавшихся угловъ.

Рѣш. Углы выйдутъ равными потому что при наложеніи

дугъ концы ихъ совмѣстятся, центры также, и стало быть и стороны угловъ, у которыхъ совпадаютъ вершины и точки равноотстоящія отъ вершинъ.

Затѣмъ даются задачи рѣшаемыя при помощи измѣренія въ которыхъ ученики наблюдаютъ тотъ фактъ, что углу вдвое, втрое, вчетверо меньшему или большему соотвѣтствуетъ, во столько же разъ меньшая или большая дуга и на оборотъ.

Отсюда выводятся слѣдующіе пріемы построенія равныхъ, въ нѣсколько разъ увеличенныхъ или уменьшенныхъ угловъ.

1) Чтобы построить уголъ равный данному нужно изъ вершины даннаго угла, какъ центра описать между сторонами дугу, затѣмъ провести произвольную прямую, на ней взять точку и изъ нее какъ центра описать дугу, равнорадіусную съ первой; далѣе измѣрить хорду, соотвѣтствующую данному углу и отложить ее по второй дугѣ, отъ точки пересѣченія ея съ прямой; наконецъ черезъ полученную новую точку и конецъ прямой (центръ второй дуги) провести прямую, которая и будетъ второю стороною искомаго угла.

2) При построеніи угла въ нѣсколько разъ большаго хорда соотвѣтствующая данному углу, вмѣсто одного раза откладывается нѣсколько разъ.

3) При построеніи угла въ нѣсколько разъ меньшаго данному по дугѣ проведенной изъ конца произвольной прямой, какъ центра, откладывается хорда соотвѣтствующая части дуги заключенной между сторонами даннаго угла.

IV.

Доказываются предложенія:

1) Діаметръ раздѣляетъ окружность на двѣ равныя части— полуокружности.

2) Два перпендикулярные діаметра раздѣляютъ окружность на четыре равныя части.

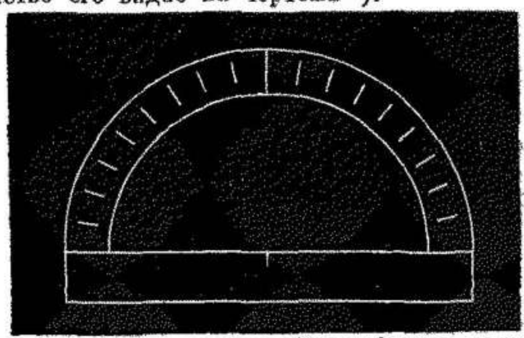
3) Прямому углу соотвѣтствуетъ дуга въ четверть окружности; половинѣ прямого дуга въ $^1/_8$ окружности и т. д.

Затѣмъ вырабатывается пріемъ построенія перпендикуляра изъ точки на прямой (прямостоящей) при помощи полуокружности.

Въ заключеніе *этой статьи дается понятіе объ измѣреніи* угловъ дугами и раздѣленіи съ этою цѣлію окружности на части, называемыя градусами. Каждому градусу—какъ части окружности соотвѣтствуетъ опредѣленной величины уголъ.

Транспортиръ, устройство котораго показывается и объясняется ученикамъ приготовляется, каждымъ изъ нихъ для себя, изъ не толстой папки.

Устройство его видно на чертежѣ *).



Приложеніе усвоенныхъ понятій и пріемовъ построенія дѣлается на составленіи учениками не сложныхъ чертежей съ оригиналовъ или же по диктовкѣ.

Задачи:

Провести прямую и поставить точку отстоящую на 1, $1^1/_2$, 2 и т. д. вершковъ отъ концевъ ея.

245) Провести прямую и внѣ ея поставить точку и затѣмъ на прямой назначить точку находящуюся въ разстояніи 1, $1^1/_2$, 2 и т. д. вершковъ отъ первой точки.

246) Провести дугу и вычертить уголъ ей соотвѣтствующій.

247) У данной точки построить уголъ равный данному.

248) Провести двѣ сходящіяся прямыя, которыя составляли бы уголъ равный данному.

*) Показанный на чертежѣ транспортиръ раздѣленъ на 9 частей, изъ которыхъ каждая заключаетъ въ себѣ 10°; такой транспортиръ можетъ быть изготовленъ учениками; но при объясненіи устройства этого инструмента слѣдуетъ показать экземпляръ съ точными дѣленіями *на градусы*.

249) На данной прямой взять точку и через нее провести другую прямую, которая составляла бы съ первою уголъ равный данному.

250) Внѣ данной прямой взять точку и черезъ нее провести прямую составляющую съ первою уголъ равный данному.

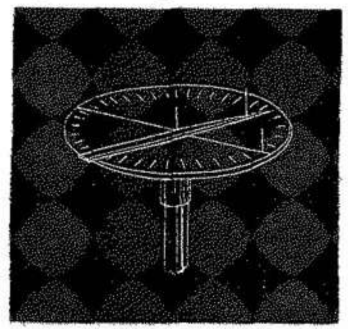
251) Вычертить уголъ въ 37^0, 14^0, 103^0, $34^1/_2{}^0$ и т. д.

252) Вычертить уголъ соотвѣтствующей дугѣ въ $^1/_3$ полуокружности.

253) Вычертить нѣсколько угловъ произвольной величины и измѣрить ихъ транспортиромъ.

Когда ученики достаточно освоились съ употребленіемъ транспортира на построеніи и измѣреніи угловъ—имъ можно показать устройство и употребленіе простѣйшаго изъ угломѣрныхъ инструментовъ—*астролябіи*.

Но для этаго нѣтъ надобности приносить въ классъ инструментъ отъ оптика; для нашей цѣли достаточно воспользоваться инструментомъ, который можетъ быть сдѣланъ самимъ преподавателемъ. Это картонный кругъ раздѣленный на градусы; отъ нуля, черезъ центръ явственно проведена чорная черта, которая направляется по одной сторонѣ измѣряемаго угла, а стрѣлка укрѣпленная и вращающаяся у центра направляется по другой сторонѣ; число дѣленій дуги между чертою и стрѣлкою покажетъ величину угла. Для удобства



измѣренія кругъ надѣвается на заостренную снизу палку, которая отвѣсно втыкается въ землю, а въ центрѣ круга, на концѣ стрѣлки и у нулеваго дѣленія, вставляются не толстые проволочные гвоздочки, какъ показано на фигурѣ.

Такая астролябія отличается отъ транспортира только тѣмъ, что вмѣсто полкруга она имѣетъ цѣлый кругъ, и въ центрѣ этого круга вращается стрѣлка для отсчета. Изъ сравненія такой астролябіи съ транспортиромъ ученики легко поймутъ ея устройство и употребленіе.

Упражненія въ измѣреніи угловъ, образуемыхъ прямыми соединяющими различные предметы въ классѣ и на дворѣ, а также назначеніе бороздъ или рядовъ кольевъ подъ опредѣленными углами, при помощи астролябіи, окончательно вы-

яснить ученикамъ сущность устройства угломѣрныхъ инструментовъ и пріема измѣренія и отложенія на мѣстности угловъ.

Вопросы для повторенія.

1) Чѣмъ отличается кривая отъ прямой?

2) Какъ вычертить кривую по кривизнѣ одинаковую съ данной?

3) Какъ сравнить по кривизнѣ нѣсколько данныхъ кривыхъ?

4) Что называется круговою, кривою или окружностью?

5) Какъ получается изъ дуги *кругъ*?

6) Что мы замѣчаемъ при наложеніи частей дуги одна на другую?

7) Какъ вычертить дугу, и на какомъ свойствѣ этой кривой основанъ пріемъ начертанія ея?

8) Что называется *центромъ*, *радіусомъ*, *діаметромъ*, *хордою*, *касательною и сѣкущею*?

9) Какая зависимость существуетъ между величиной радіуса и кривизной дуги?

10) Во сколько разъ діаметръ больше радіуса?

11) Сколько *радіусовъ*, *діаметровъ*, *хордъ*, *сѣкущихъ* и *касательныхъ* можно провести черезъ одну точку: а) на окружности, б) внутри окружности и в) внѣ окружности:

12) Сколько *радіусовъ*, *діаметровъ*, *хордъ*, *сѣкущихъ* и *касательныхъ* можно провести черезъ двѣ точки а) на окружности, б) внѣ окружности, в) внутри окружности?

13) Какъ провести точно касательную къ данному кругу или дугѣ: а) черезъ точку, данную внѣ окружности и б) на окружности?

14) Какія дуги могутъ быть сравниваемы между собою по длинѣ?

15) Какъ изъ двухъ или нѣсколькихъ равнорадіусныхъ дугъ составить одну, равную, по длинѣ, суммѣ ихъ?

16) Какъ вычертить дугу равную по длинѣ разности между двумя данными равнорадіусными дугами?

17) Какъ вычертить дугу въ нѣсколько разъ большую данной?

18) Какъ раздѣлить дугу на части и вычертить дугу, по длинѣ, въ нѣсколько разъ меньшую данной?

19) Какъ построить уголъ равный данному или въ нѣсколько разъ большій или меньшій его, при помощи вспомогательной дуги?—На чемъ основанъ этотъ пріемъ построенія?

20) Какъ раздѣлить окружность по поламъ, на четыре, на восемъ и т. д. частей, при помощи проведенія діаметровъ?

21) Какъ сдѣлать транспортиръ и какъ измѣрять имъ углы?

22) Въ чемъ заключается устройство астролябіи и какъ употреблять ее при измѣреніи угловъ?

О фигурахъ.

I.

Ученики вычерчиваютъ нѣсколько линій, между которыми есть прямыя, кривыя и ломаныя.

Преподаватель обращаетъ вниманіе учениковъ на то, что у каждой изъ вычерченныхъ линій по два конца и затѣмъ напоминаетъ объ окружности—линіи сомкнутой, сходящейся (сама съ собою), а потому не имѣющей концевъ.

Далѣе преподаватель задаетъ рядъ вопросовъ:

Нельзя ли вычертить прямую, ломаную и кривую линіи такъ, чтобы онѣ были сомкнутыми подобно окружности? — Попытайтесь вычертить такія линіи. Какія изъ линій могутъ быть сомкнутыми и какія не могутъ?

Мѣсто обведенное сомкнутою линіею мы будемъ называть *фигурою*.

Изъ какихъ линій могутъ быть образованы фигуры?

— Изъ *кривыхъ* и *ломаныхъ*.

— Поэтому, какъ можемъ мы подраздѣлить всѣ возможныя фигуры?

— На образованныя кривыми линіями или иначе *криволинейныя* и на образованныя ломаными линіями или иначе *ломано-линейныя* фигуры.

— Но вѣдь ломаныя линіи сами образуются изъ какихъ линій?

— Изъ прямыхъ.

— Стало быть, какъ еще можно назвать фигуры, образованныя ломаными линіями?

— *Прямолинейными.*

— Такъ въ дѣйствительности и называются эти фигуры—это вы и запомните. Только называя фигуру *прямолинейною*—мы должны всегда помнить, что она составлена не изъ одной прямой, которая не можетъ быть сомкнутою, а изъ нѣсколькихъ.—А нельзя ли составить фигуру изъ двухъ прямыхъ?—Почему нельзя?

— Потому что изъ двухъ прямыхъ составляется уголъ, стороны котораго сходятся только въ вершинѣ, а въ противуположномъ направленіи расходятся.

— А можно ли составить прямолинейную фигуру не изъ трехъ прямыхъ? А изъ четырехъ, пяти и болѣе?

II.

Вычертите кругъ и нѣсколько другихъ криволинейныхъ фигуръ и присмотритесь внимательно чѣмъ отличается кругъ отъ прочихъ криволинейныхъ фигуръ?

— У круга есть центръ, отъ котораго край фигуры или ея обводъ идетъ вездѣ въ равномъ разстояніи; отъ этого кругъ одинаково распространяется во всѣ стороны отъ центра и, какъ бы ни мѣрили его, имѣетъ одинаковую длину и ширину; прямыми проходящими черезъ центръ (діаметрами), кругъ можетъ быть раздѣленъ на части совершенно одинаковыя по фигурѣ и величинѣ и имѣетъ со всѣхъ сторонъ одинаковое образованіе; между тѣмъ какъ прочія криволинейныя фигуры имѣютъ такую обводную кривую, которая идетъ не на одинаковомъ разстояніи отъ средины фигуры, а потому неодинаково распространяется во всѣ стороны и, при измѣреніи, въ одномъ направленіи оказываются больше чѣмъ въ другомъ; кромѣ того, онѣ не могутъ быть раздѣлены на одинаковыя по фигурѣ и размѣрамъ части и имѣютъ съ различныхъ сторонъ различное образованіе. На этомъ основаніи

кругъ можетъ быть названъ *правильной* криволинейной фигурой, а всѣ другія *неправильными* криволинейными фигурами.

— Если бы я задалъ вамъ—вырѣзать изъ бумаги *правильную* криволинейную фигуру—кругъ, то какъ бы вы это сдѣлали?

— Мы сначала вычертили бы окружность т. е. обводъ круга и затѣмъ по ней вырѣзала бы и самую фигуру.

— А нельзя ли не вычерчивать всего обвода правильной фигуры — окружности, а вырѣзать кругъ, вычертивъ только часть окружности?

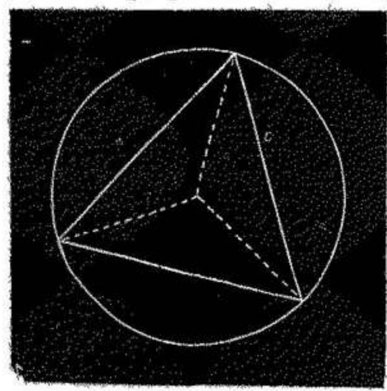
— Можно, только тогда нужно сложить бумагу *вдвое* (если хотимъ вычертить по полуокружности) *вчетверо* (если по четверти окружности) и т. д. и затѣмъ вырѣзать по вычерченной дугѣ — части круговаго обвода.

— А можно ли вычертить такимъ же образомъ неправильную прямолинейную фигуру?

— Нѣтъ нельзя, потому что она не можетъ быть составлена изъ совершенно одинаковыхъ по фигурѣ и по величинѣ—стало быть совмѣщающихся—частей. Въ этомъ случаѣ нужно вычертить весь обводъ фигуры и по немъ вырѣзать.

III.

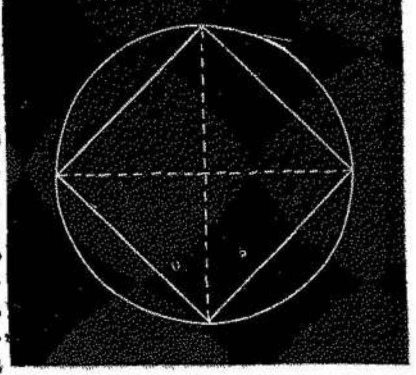
Вычертите три круга; окружность перваго изъ нихъ раздѣлите на три равныя части, втораго — на четыре, а третьяго на шесть и точки дѣленія въ каждомъ изъ круговъ, по парно, соедините прямыми линіями. — Какія фигуры получились у васъ?—Вычертите безъ помощи круга три или четыре прямолинейныя фигуры.



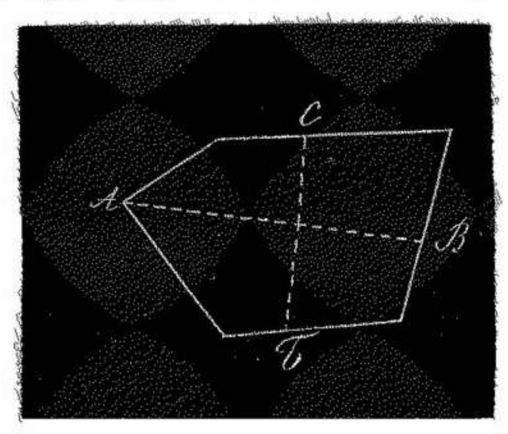
Чѣмъ отличаются первыя три фигуры отъ послѣднихъ?

— Вершины этихъ фигуръ, какъ находящіяся на окружности, равно отстоятъ отъ центра; всѣ прямыя составляющія

обводъ фигуры равны между собою, а потому если мы разрѣжемъ одну изъ нихъ по линіямъ, проведеннымъ отъ центра къ вершинамъ, а также по линіямъ, соединяющимъ вершины и, проходящимъ черезъ центръ, то части будутъ имѣть одинаковую фигуру и одинаковую величину—стало бытьсовмѣстимы; между тѣмъ какъ другія фигуры имѣютъ различной длины стороны, вершины ихъ удалены отъ средины фигуры на различное разстояніе и не могутъ быть разрѣзаны на равныя—совмѣстимыя части. Кромѣ



того, если первыя фигуры имѣютъ одинаковое протяженіе по



всѣмъ направленіямъ, то вторыя напримѣръ фиг. *АСВБ* болѣе простирается по направленію *А В* чѣмъ по напавленію *С Б*.

— Какъ же поэтому мы должны назвать фигуры, вычерченныя при помощи круга? —(правильными). А остальныя? (неправильными).

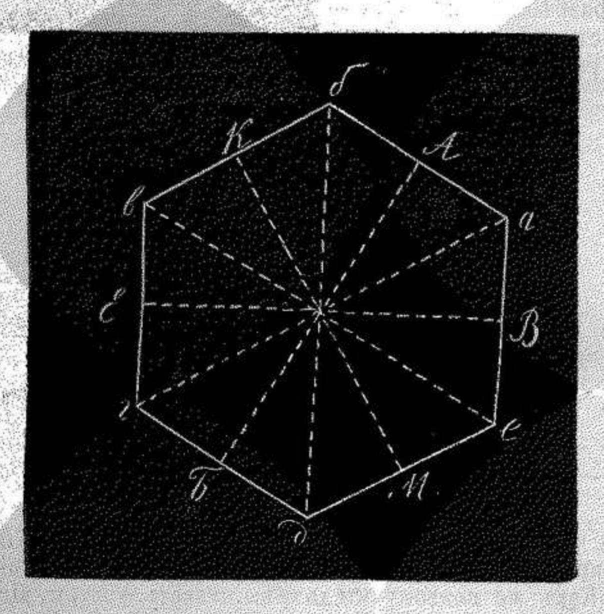
— А нельзя ли вычертить правильную прямолинейную фигуру безъ помощи круга? — Какъ должны быть расположены вершины у правильной фигуры?—Каковы должны быть между

ними разстоянія?—Какъ же значитъ вы будете строить правильную фигуру безъ помощи круга?

— Мы назначимъ сначала точку, которую примемъ за средину фигуры, затѣмъ въ равномъ отъ нея разстояніи поставимъ нѣсколько точекъ такъ, чтобы каждая изъ нихъ отъ сосѣднихъ съ нею отстояла на одно и тоже разстояніе; наконецъ разставленныя точки попарно соединяются.

— А какъ вы думаете — не будутъ ли равными углы составляемые сторонами фигуры?—Какъ это доказать безъ помощи дѣйствительнаго наложенія?

— Если вообразимъ себѣ что фигура перегнута пополамъ по линіи *А Б*, то половины совмѣстятся—стало быть и углы одной половины совмѣстятся съ углами другой половины. Значитъ уголъ *а*=углу *б*. Если перегнемъ ту же фигуру по



линіи *Е В*, то докажемъ что уголъ *а* равенъ углу *е*; если перегнемъ по линіи *К М*, то увидимъ что углу *а* равенъ уголъ *г*; если перегнемъ по линіи *б д*, то увидимъ что уголъ *а* равенъ углу *в* и наконецъ перегибая фигуру по линіи *в е* мы убѣждаемся что углу *а* равенъ уголъ *д*.

Значитъ, всѣ углы фигуры равны углу a, а потому и равны между собою *).

— У всѣхъ ли правильныхъ, прямолинейныхъ фигуръ углы равны между собою? — Почему?

— Потому что всѣ эти фигуры могутъ быть раздѣлены на двѣ совершенно равныя, совмѣстимыя части, которыя могутъ быть накладываемы точно также, какъ мы только что накладывали части приведенной фигуры.

254) Вычертить нѣсколько правильныхъ и неправильныхъ прямолинейныхъ фигуръ.

255) Вырѣзать изъ бумаги нѣсколько прямолинейныхъ фигуръ—правильныхъ и неправильныхъ.

Нельзя ли, при вырѣзываніи правильныхъ фигуръ вычертить не всю ломаную—не весь обводъ, а только нѣкоторую часть ея?—Какъ это сдѣлать? (см. выше, стр. 98).

IV.

Прямолинейныя фигуры, по числу прямыхъ *сторонъ*, могутъ быть названы *трехсторонниками*, *четырехсторонниками*, *пятисторонниками* и вообще *многосторонниками*; но такъ какъ у такихъ фигуръ по стольку же сторонъ по скольку и угловъ, то ихъ принято называть *треугольниками*, *четыреугольниками*, *пятиугольниками* и вообще *многоугольниками*.

Въ прямолинейныхъ фигурахъ какъ правильныхъ, такъ и неправильныхъ могутъ быть не только *выпуклые* (обращенные отверзтіями внутрь фигуры) но и *впалые* (обращенные отверзтіями внаружу) углы.

Есть только одинъ видъ прямолинейныхъ фигуръ — это *треугольники*, которые могутъ имѣть только выпуклые углы.

---

*) Если бы воображаемое доказательство оказалось недостаточно яснымъ, то слѣдуетъ прибѣгнуть къ дѣйствительному наложенію, заканчивая—все таки—доказательствомъ—при помощи воображаемаго наложенія.

256) Вычертить правильный треугольникъ и измѣрить транспортиромъ одинъ изъ его угловъ.

257) Построить неправильный треугольникъ и измѣрить сумму всѣхъ угловъ.

258) Вычертить правильный четыреугольникъ и измѣрить величину угла.

259) Вычертить правильный четыреугольникъ со сторонами въ 1 вершокъ длины.

260) Измѣрить сумму угловъ какого нибудь неправильнаго четыреугольника.

261) Построить правильный шестиугольникъ, при помощи круга, вычерченнаго радіусомъ въ $^3/_4$ вершка и измѣрить уголъ такого шестиугольника.

262) Вычертить нѣсколько прямолинейныхъ фигуръ съ впалыми углами.

263) Вычертить правильный восьмиугольникъ съ впалыми углами и измѣрить одинъ изъ выпуклыхъ и одинъ изъ впалыхъ угловъ.

V.

Вычертите какой нибудь треугольникъ и укажите его части?—Сколько сторонъ у треугольника? А сколько угловъ?

Вырѣжите какой нибудь треугольникъ, приложите его къ клочку бумаги и по краямъ обрѣжте бумагу.

Какая фигура у васъ получилась?—Который изъ треугольниковъ больше?—Какъ можно убѣдиться въ томъ, что фигуры дѣйствительно равны?

Сдѣлайте это наложеніе каждый съ своими треугольниками.—Совмѣстились ли треугольники?—Какъ вы узнаете, что треугольники совмѣстились?

— Когда всѣ стороны одного треугольника расположились по сторонамъ другаго.

— Присмотритесь какъ расположились углы треугольника?

— Углы одного треугольника совмѣстились съ углами другаго.

— Что же, поэтому, мы можемъ сказать о частяхъ (т. е. о сторонахъ и углахъ) вырѣзанныхъ треугольниковъ?

— Что эти части равны между собою т. е. стороны одного треугольника равны сторонамъ другаго и углы перваго равны угламъ втораго.

— Значитъ ли это, что всякій изъ угловъ одного треугольника, равенъ какому угодно углу другаго треугольника и всякая сторона одного равна какой угодно сторонѣ другаго?

— Нѣтъ, это значитъ что всякой сторонѣ одного треугольника непремѣнно найдется равная сторона въ другомъ треугольникѣ и что всякому углу перваго треугольника найдется равный уголъ во второмъ.

— Значитъ необходимо называть это равенство какъ нибудь иначе, а то если скажете части одного треугольника равны частямъ другаго, то можно подумать, что какая угодно часть одного треугольника равна какой угодно части другаго.

Если хотимъ сказать объ только что описанномъ вами равенствѣ частей, то будемъ выражаться такъ: части треугольниковъ *соотвѣтственно* равны, потому что каждой части одного треугольника соотвѣтствуетъ равная часть въ другомъ треугольникѣ.

— Вотъ я вырѣзалъ два треугольника и утверждаю, что они равны. Какъ можно убѣдиться въ томъ что они дѣйствительно равны?—(наложеніемъ).—Что окажется при наложеніи, если треугольники равны.

— Они совмѣстятся одинъ съ другимъ во всѣхъ частяхъ т. е. всѣ стороны одного изъ нихъ размѣстятся по сторонамъ другаго, а углы перваго — по угламъ втораго.

— Значитъ, если мы навѣрно знаемъ что треугольники равны, то что можемъ сказать о частяхъ ихъ?

— Что онѣ *соотвѣтственно* равны т. е. что каждой сторонѣ одного треугольника соотвѣтствуетъ равная сторона въ другомъ и каждому углу въ одномъ соотвѣтствуетъ равный уголъ въ другомъ.

Вычертите у себя въ тетрадяхъ треугольникъ, а я, на оборотѣ доски вычерчу другой треугольникъ и скажу вамъ что одна изъ сторонъ моего треугольника въ 2 фута т. е. больше каждой изъ сторонъ вашего треугольника; можетъ ли быть мой треугольникъ равнымъ вашему? (нѣтъ).—Почемъ вы это знаете—вѣдь вы невидите даже моего треугольника и во всякомъ случаѣ не можете приложить его къ вашему?

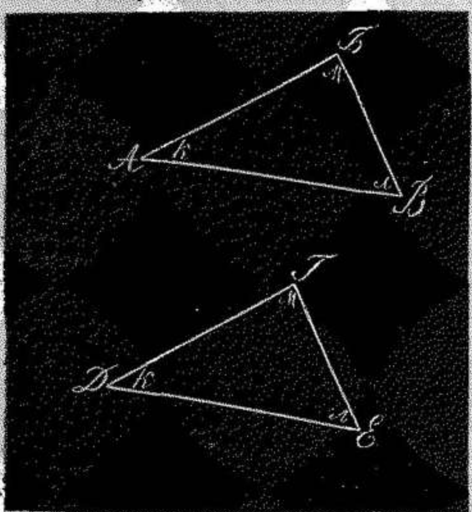
— Мы знаемъ это и безъ наложенія. Если одна изъ сторонъ вашего треугольника въ 2 фута длиною, то она не совмѣстится ни съ одной изъ сторонъ нашего треугольника, а совмѣщеніе треугольниковъ мы получаемъ только тогда если *всѣ* стороны одного треугольника совмѣстились съ сторонами другаго.

Вычертите остроугольный треугольникъ, а я у себя въ запасной книжкѣ вычерчу треугольникъ съ тупымъ угломъ. Не будутъ ли равны мой треугольникъ и вычерченный вами?—Какъ вы можете убѣдиться въ неравенствѣ ихъ безъ помощи наложенія?

— Неравенство ихъ можно доказать тѣмъ, что стороны тупаго угла вашего треугольника не могутъ одновременно совпадать съ сторонами како го либо изъ угловъ нашего треугольника — стало быть одна изъ сторонъ этаго тупаго угла не можетъ совмѣститься ни съ какой стороной нашего треугольника, а потому и совмѣщеніе фигуръ невозможно.

Построить два равныхъ угла, отложить соотвѣтственно равныя стороны и концы сторонъ соединить.

Какія фигуры у васъ получились? — Измѣрьте всѣ углы и всѣ стороны этихъ двухъ треугольниковъ и если найдете соотвѣтственно равные углы и стороны то отмѣтьте ихъ одинаковыми буквами или знаками.



У всѣхъ ли части треугольниковъ оказались соотвѣтственно равными?— Нельзя ли доказать, что эти треугольники равны?

— Можно—посредствомъ наложенія.

— Но вѣдь для того чтобы сдѣлать дѣйствительное наложеніе необходимо было бы одинъ изъ треугольниковъ вырѣзать, и стало быть испортить тетрадь:..

А нельзя ли убѣдиться въ равенствѣ фигуръ безъ дѣйствительнаго наложенія—подобно тому какъ мы рань-

ше убѣждались въ невозможности совмѣщенія т. е. въ неравенствѣ?—Представимъ себѣ что нижній треугольникъ (*Д Г Е*) мы наложили на верхній (*А Б В*).—Какъ надо дѣлать это наложеніе? — Можно ли накладывать такъ, чтобы на сторону *А В* верхняго треугольника приходилась сторона *Д Г* нижняго?

— Нѣтъ, необходимо, чтобы при наложеніи сторона *Д Е* нижняго была приложена къ равной ей сторонѣ *А В* верхняго; тогда обѣ эти стороны совпадутъ.

— А все ли равно.—Наложить ли такъ, чтобы конецъ *Д* пришолся къ концу *В*, а конецъ *Е* къ концу *А*, или же такъ, чтобы конецъ *Д* пришелся къ концу *А*, а *Е* къ *Д?*

— Нѣтъ не все равно: нужно чтобы конецъ *Д* пришелся къ концу *А*, а *Е* къ *В* потому что только тогда сторона *Д Г* прійдется къ равной ей сторонѣ *А Б*, а сторона *Г Е* къ равной ей *Б В;* въ противномъ же случаѣ сторона *Д Г* пришлась бы къ неравной сторонѣ *Б В*, а сторона *Г Е* къ неравной ей сторонѣ *А В* и совмѣщеніе было бы не возможно.

— Такъ представимъ себѣ, что нижній треугольникъ наложенъ на верхній такъ, что точка *Д* упала въ точку *А*, а точка *Е* въ точку *В* и стало быть стороны *А В* и *Д Е* совпали. А какъ пойдетъ сторона *Д Г?*

— Она пойдетъ по сторонѣ *А Б*.

— Почему?

— Потому что уголъ *к* равенъ углу *к*.

— А если бы сторона *Д Г* пошла выше или ниже *А Б* то чтобы мы могли сказать объ углахъ *к* и *к*.

— Что они не равны.

— Такъ какъ углы равны, то дѣйствительно *Д Г* должна пойти по *А Б*. Но гдѣ упадетъ точка *Г?*

— Она упадетъ въ точку *Б* потому что стороны *А Б* и *Д Г* равны, а мы знаемъ что если равныя прямыя приложить одна къ другой такъ чтобы какой нибудь конецъ первой совпадалъ съ какимъ нибудь изъ концевъ второй, то другіе концы прямыхъ неизбѣжно совпадаютъ.

— Значитъ, сторона *Д Е* совпадаетъ съ стороною *А В*, а сторона *Д Г* съ стороною *А Б*, стало быть точка *Е* упадетъ въ *В*, а *Г* въ *Б*. А какъ же пойдетъ сторона *Г Е?*

— Она совмѣстится съ стороною *Б В* потому что концы ея совмѣстились съ концами стороны *Б В*, а мы знаемъ что

если концы какихъ либо двухъ прямыхъ совпали, то и самыя прямыя совпадаютъ.

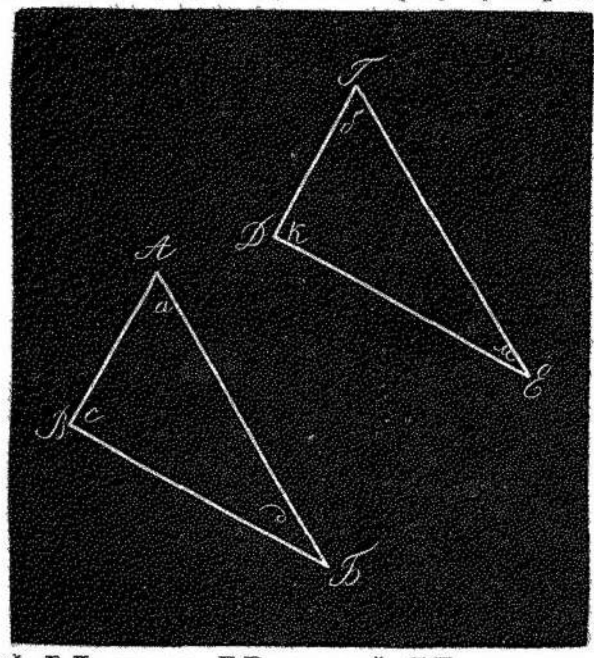
— Такъ должы ли совмѣститься треугольники, если бы мы ихъ такъ накладывали какъ теперь говорилось?

— Непремѣнно должны совмѣститься потому что всѣ стороны ихъ совпадутъ.

— Нужно ли поэтому вырѣзывать изъ тетради одинъ изъ вычерченныхъ треугольниковъ, чтобы убѣдиться въ ихъ равенствѣ? Какъ вы думаете—отчего зависитъ равенство этихъ треугольниковъ?

Помните, когда мы брали треугольники съ неравными частями, то что мы тамъ доказывали? (Что они не равны).

Смотрите, я вычерчу на доскѣ два треугольника, у которыхъ всѣ соотвѣтственныя части будутъ равны: уголъ *а*= углу *б*, уголъ *с*=углу *к* и уголъ *д*=углу *м*, сторона *А Б*=



сторонѣ *Г Д*, сторона *Б В*=сторонѣ *Д Е* и сторона *А Б*= сторонѣ *Г Е*. Можете ли вы доказать что эти треугольники равны?

— *К* докажетъ послѣдовательно, ничего не пропуская, возможность совмѣщенія треугольниковъ — стало быть ихъ равенство, а остальные слѣдите за ходомъ доказательства и останавливайте *К*, если онъ что либо пропуститъ или неправильно скажетъ.

— *Если мы наложимъ треугольникъ А Б В на треугольникъ Г Е Д, такъ, чтобы точка А упала въ точку Г и сторона А В на сторону Г Д, то эти обѣ стороны по равенству совпадутъ и точка В упадетъ въ точку Д. Такъ какъ уголъ а и б равны, то и сторона А Б пойдетъ по Г Е и какъ равная совмѣстится съ нею — стало быть и точка Б упадетъ въ точку Е. Мы знаемъ уже, что точка В находится въ точкѣ Д, а теперь видимъ что и точка Б упадетъ въ точку Е—значитъ концы стороны В Б совпали съ концами стороны Д Е, а слѣдовательно и самая сторона В Б совпала съ стороною Д Е. А если всѣ стороны совпадаютъ, то и треугольники совпадаютъ, чѣмъ и доказывается ихъ равенство.*

Припомните, нужно ли было знать для доказательства, что всѣ углы и стороны соотвѣтственно равны, или приходилось говорить о равенствѣ нѣкоторыхъ только частей?

— *Намъ нужно было знать только что уголъ к равенъ углу к, что сторона А Б равна сторонѣ Г Е и В Б равна Д Е т. е. что въ обоихъ треугольникахъ имѣются по равному углу и по двѣ соотвѣтственно равныхъ стороны, его образующихъ.*

VI.

Если я гдѣ нибудь у себя вычерчу треугольникъ и скажу, чтобы и вы у себя въ тетрадяхъ вычертили такой же точно треугольникъ т. е. равный моему треугольнику, то можете ли вы исполнить заданное? — Необходимо ли вамъ видѣть мой треугольникъ? А если я вамъ скажу величину угловъ и сторонъ?

Всѣ ли углы и стороны вамъ нужно знать?

Но вѣдь не всѣ же вдругъ—что нибудь вамъ нужно знать прежде, а остальное послѣ? Что вамъ нужно знать прежде

всего? (Длину одной изъ сторонъ).—Хорошо: одна изъ сторонъ моего треугольника имѣетъ длину $1^1/_2$ вершка. Можете ли уже теперь приступить къ построенію треугольника?

— Мы уже можемъ провести одну изъ сторонъ треугольника. Для этого проводимъ прямую, и по ней откладываемъ $1^1/_2$ вершка и отложенную прямую принимаемъ за сторону треугольника.

— Затѣмъ, что вамъ нужно знать?

— Величину одного изъ угловъ, которые эта сторона образуетъ съ другими сторонами фигуры.

— Уголъ, величину котораго вы желаете знать *прямой*.

— Къ концу вычерченной стороны мы проводимъ перпендикуляръ т. е. прямую составляющую съ нею прямой уголъ и такимъ образомъ получаемъ направленіе другой стороны треугольника. Чтобы отложить эту другую сторону нужно знать длину ея; поэтому теперь скажите намъ длину другой стороны образующей прямой уголъ.

— Эта сторона въ 1 вершокъ длиною.

— По проведенному перпендикуляру откладываемъ 1 вершокъ и получаемъ конецъ другой стороны. Теперь, если соединимъ концы вычерченныхъ двухъ сторонъ, то получимъ третью сторону потому что концы ея находятся въ концахъ первыхъ двухъ сторонъ, а мы знаемъ, что если извѣстны концы прямой, то соединивъ ихъ получаемъ самую прямую.

— А какъ же вы узнали углы, которые составляются третьей стороною съ первыми двумя?

— Они сами собою получились.

— А можетъ быть у моего треугольника эти углы другіе чѣмъ у вашего?

— Нѣтъ, этого не можетъ быть по той причинѣ, что нашъ треугольникъ долженъ быть равенъ вашему, слѣдовательно и всѣ углы нашего соотвѣтственно равны угламъ вашего треугольника.

— А докажите, что вычерченный вами треугольникъ равенъ моему?

— Если наложимъ нашъ треугольникъ на вашъ, такъ чтобы вершина прямаго угла одного упала въ вершину прямаго угла другаго и $1^1/_2$ вершковая сторона одного пошла по равной ей въ другомъ треугольникѣ, тогда 1 вершковая сторона перваго пойдетъ по равной ей сторонѣ втораго, потому что углы прямые — стало быть равные. Такъ какъ наложен-

ныя стороны соотвѣтственно равны, то онѣ совмѣстятся и концы ихъ совпадутъ.

А концы совмѣщенныхъ сторонъ — суть въ тоже время концы третьей стороны у обоихъ треугольниковъ. А мы знаемъ, что если концы прямыхъ совмѣстились, то самыя прямыя необходимо совмѣщаются.

Такъ, что вамъ нужно знать, если желаете вычертить треугольникъ равный данному.

— *Нужно знать одинъ изъ угловъ треугольника и длину образующихъ этотъ уголъ сторонъ.*

264) Вычертить уголъ и двѣ прямыя различной длины и затѣмъ построить треугольникъ, который бы имѣлъ одинъ такой же уголъ и стороны образующія этотъ уголъ были бы равными вычерченнымъ прямымъ.

265) Построить треугольникъ съ угломъ въ 43^0 и сторонами къ нему прилежащими въ $1^1/_2$ вершка.

266) Уголъ треугольника 123^0, одна изъ образующихъ его сторонъ $1^1/_4$ вершка, а другая $^3/_4$ вершка. Построить треугольникъ.

267) Построить два соединенные сторонами (имѣющіе одну общую сторону) треугольника, у которыхъ по одному изъ угловъ въ 60^0 а прилежащія къ нему стороны въ 1 вершокъ.

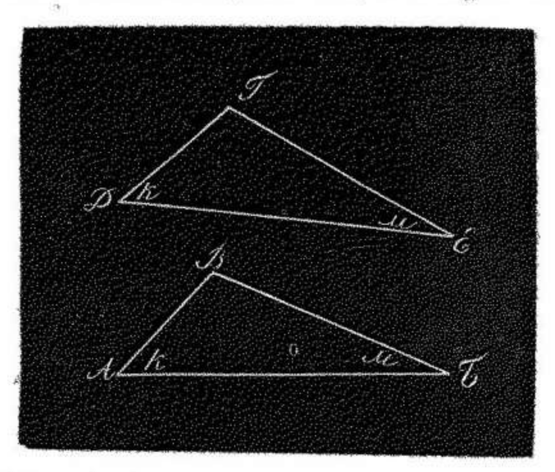
VII.

Постройте два такихъ треугольника, чтобы сторона и два прилежащіе къ ней угла одного были соотвѣтственно равны сторонѣ и двумъ прилежащимъ къ ней угламъ другаго.

Какъ вы думаете, не будутъ ли эти треугольники равными? — Нельзя ли доказать это?

— *Если наложимъ одинъ треугольникъ на другой такъ чтобы точка А упала въ точку Д и сторона А Б пошла по сторонѣ Д Е; тогда точка Б упадетъ въ точку Е по равенству сторонъ. Такъ какъ углы к и к, м и м соотвѣтственно равны, то и стороны А В и В Б пойдутъ по сторонамъ Д Г и Г Е; при этомъ точка В, въ которой сходятся стороны А В и В Б неминуемо упадетъ въ точку Г,*

къ которой сходятся стороны Д Г *и* Г Е *потому что прямыя направившіяся по этимъ сторонамъ не могутъ имѣть другой точки схожденія кромѣ той, къ которой сходятся и*



прямыя Д Г *и* Г Е. *И такъ, всѣ стороны одного изъ вычерченныхъ треугольниковъ совпали съ сторонами другаго—стало быть обѣ фигуры равны между собою.*

— Значитъ, если вы знаете, что два угла и къ нимъ прилежащая сторона одного треугольника соотвѣтственно равны двумъ угламъ и къ нимъ прилежащей сторонѣ другаго, то не можете ли поэтому уже заключить о равенствѣ фигуръ?

268) Вычертить треугольникъ, у котораго два угла равны 45 градусамъ и къ нимъ прилежащая сторона въ $1^1/_2$ вершка длиною.

269) Вычертить какой нибудь треугольникъ (не откладывая угловъ и сторонъ), измѣрить, при помощи транспортира, два какіе нибудь угла и посредствомъ мѣрки длину прилежащей къ нимъ стороны и по этимъ частямъ построить треугольникъ равный прежде вычерченному.

270) Построить треугольникъ, у котораго одинъ изъ угловъ прямой, другой въ 30^0, а къ нимъ прилежащая сторона въ $1^1/_4$ вершка длины.

VIII.

Вотъ я вычерчу на доскѣ два треугольника, у которыхъ всѣ стороны соотвѣтственно равны. Посмотримъ не равны ли эти треугольники и для этой цѣли сдѣлаемъ наложеніе. *Б* разскажетъ какъ нужно дѣлать наложеніе, а остальные слѣдите и помогайте ему.

— Наложимъ треугольникъ *АВБ* на треугольникъ *ЕДГ* такъ, чтобы точка *В* совпала съ точкою Д и сторона *ВБ* пошла по Д*Г*, тогда точка *Б* упадетъ въ точку *Г*, такъ какъ стороны эти равны между собою.

— Въ какомъ разстояніи отъ Д должна упасть точка *А*?

— Въ разстояніи равномъ *АВ* или все равно Д*Е*.

— А не упадетъ ли точка *А* въ точку *Е*?

— Этого мы не знаемъ.

— Нельзя ли прочертить такую линію на которой будетъ находится точка *А* при наложеніи.

— Она будетъ находиться гдѣ нибудь на дугѣ, проведенной изъ центра Д черезъ точку *Е*.

— А въ какомъ разстояніи точка *А* будетъ находиться отъ конца *Г* при наложеніи.

— На разстояніи равномъ *АБ* или все равно *ЕГ*.

— Стало быть—на какой дугѣ.

— На дугѣ проведенной изъ центра *Г* черезъ точку *Е*.

— А если какая нибудь точка или какое нибудь мѣсто находится на двухъ линіяхъ — то гдѣ его нужно искать? — Такъ гдѣ же должна находиться точка *А* при наложеніи?

Это доказательство повторяется безъ помощи наводящихъ вопросовъ въ связномъ и полномъ изложеніи.

271) Вычертить треугольникъ со сторонами въ 1 вершокъ длины.

272) Вычертить какой нибудь треугольникъ, измѣрить его стороны и по этимъ даннымъ вычертить равный ему треугольникъ.

273) Построить треугольникъ со сторонами 1, $1^1/_2$ и $1^3/_4$ вершка.

IX.

Точно такимъ же путемъ вырабатываются условія равенства и условія возможности построенія многоугольниковъ вообще. При эгомъ нѣтъ надобности брать много видовъ фигуръ; достаточно ограничиться четыреугольникомъ и семиугольникомъ. На изученіи этихъ фигуръ ученики достаточно освоятся съ пріемомъ опредѣленія условій равенства и условій возможности построенія прямолинейныхъ фигуръ.

Здѣсь устанавливаются слѣдующіе выводы:

1) Четыреугольники равны, если всѣ стороны и одинъ уголъ одного соотвѣтственно равны всѣмъ сторонамъ и одному углу другаго.

2) Четыреугольники равны, если три угла и двѣ прилежащія къ нимъ стороны одного соотвѣтственно равны тремъ угламъ и двумъ прилежащимъ къ ней сторонамъ другаго.

3) Два семиугольника равны, если всѣ стороны и четыре рядомъ лежащіе угла одного соотвѣтственно равны всѣмъ сторонамъ и четыремъ рядомъ лежащимъ угламъ другаго.

4) Два семиугольника равны, когда шесть угловъ и къ нимъ прилежащія пять сторонъ одного соотвѣтственно равны шести угламъ и пяти прилежащимъ къ нимъ сторонамъ другаго.

Условія возможности построенія формулируются въ слѣдующія положенія:

1) Для построенія четыреугольника необходимо знать — величину трехъ угловъ его и двухъ, прилежащихъ къ нимъ сторонъ, или величину всѣхъ сторонъ и одного изъ угловъ.

2) Для построенія семиугольника необходимо знать—величину шести угловъ и пяти прилежащихъ къ нимъ сторонъ или величину всѣхъ сторонъ и четырехъ рядомъ лежащихъ угловъ.

Совокупленіе двухъ или нѣсколькихъ треугольниковъ равными сторонами образуетъ многоугольники и на оборотъ, если отъ какой нибудь вершины въ многоугольникѣ къ остальнымъ вершинамъ проведемъ прямыя, то фигура раздѣлится на нѣсколько треугольниковъ — на два треугольника раздѣляется четыреугольникъ, на три—пятиугольникъ на четыре—шестиугольникъ и т. д.

Если многоугольники состоятъ изъ равныхъ и одинаково

расположенныхъ треугольниковъ, то они равны между собою.

Всякій многоугольникъ можетъ быть вычерченъ по частямъ — треугольникамъ его составляющимъ, а потому если извѣстно достаточно данныхъ для вычерченія каждаго такого треугольника, то и многоугольникъ можетъ быть вычерченъ.

274) Вычертить какой нибудь четыреугольникъ, пятиугольникъ, шестиугольникъ и вообще многоугольникъ и построить многоугольникъ равный вычерченному, при помощи измѣренія сторонъ и угловъ

275) Построить многоугольникъ равный данному, при помощи раздѣленія даннаго на треугольники и послѣдовательнаго построенія этихъ треугольниковъ.

276) Вычертить какой нибудь треугольникъ и затѣмъ равный ему, не прибѣгая къ измѣренію угловъ, а ограничиваясь лишь измѣреніемъ длины сторонъ и вообще длины, прямыхъ?

277) Даны углы—45°,52° и 35° неправильнаго шестиугольника и извѣстно что всѣ стороны его въ 1 вершокъ длины. Построить шестиугольникъ.

278) Даны углы неправильнаго пятиугольника: 80°, 92° 56° и 152° и прилежащія къ нимъ стороны: 1 вершокъ, $^3/_4$ вершка и $1^1/_2$ вершка. Построить пятиугольникъ.

279) Извѣстны два угла треугольника 52° и 83° и къ нимъ прилежащая сторона въ $1^1/_4$ в. Найти величину третьяго угла треугольника и длину остальныхъ сторонъ.

280) Извѣстны семь угловъ восьмиугольника (105°, 125°, 130°, 145°, 93°, 160°, и 120°) и шесть прилежащихъ къ нимъ сторонъ (1, $1^1/_4$, $^3/_4$, $1^1/_2$, $1^3/_4$ и $^1/_2$ вершка). Найти длину остальныхъ сторонъ фигуры и величину восьмаго угла.

281) Установить три шеста на дворѣ (или три какіе либо предмета, наприм. стулья и т. д. въ залѣ); измѣрить аршиномъ разстояніе одного изъ нихъ отъ другаго и астролябіей углы прилежащіе къ измѣренной сторонѣ треугольника и затѣмъ, въ другомъ мѣстѣ, вычертить или обозначить шестами или стульями точно такой же треугольникъ.

Вообще желательно, чтобы кромѣ раздѣлыванія задачъ въ классѣ и на дому, ученики упражнялись въ построеніи или обозначеніи фигуръ на полу большой комнаты, на дворѣ, а еще лучше въ полѣ.

Послѣ рѣшенія задачи—по окончаніи построенія препода-

ватель не ограничивается повѣркой точности построенія, но заставляетъ то одного, то другаго изъ класса — доказывать равенство построенной фигуры съ данной или, что построенная фигура удовлетворяетъ условію заданія. Это необходимо какъ для усвоенія пріема доказательства равенства фигуръ и сознательнаго закрѣпленія въ памяти условій равенства и условій возможности построенія, такъ и для пріученія учениковъ къ возможно большей отчетливости и сознательности въ самостоятельныхъ упражненіяхъ.

Вопросы для повторенія.

1) Какая линія называется сомкнутою?

2) Какія изъ извѣстныхъ вамъ линій могутъ быть сомкнутыми?

3) Что мы называли фигурою и какія бываютъ фигуры?

4) Что называли мы правильными фигурами и въ чемъ заключается ихъ отличіе отъ неправильныхъ фигуръ?

5) Какіе бываютъ многоугольники?

6) Какіе треугольники называли мы равными?

7) Могутъ ли быть равными треугольники, у которыхъ соотвѣтственныя части неравны и почему не могутъ?

8) Какъ доказать равенство треугольниковъ съ соотвѣтственно равными частями?

9) Что нужно знать въ данномъ треугольникѣ, чтобы построить треугольникъ ему равный?

10) Какія вы знаете условія равенства треугольниковъ?

11) Какія условія достаточны для построенія треугольника равнаго данному?

12) Какія условія равенства вы знаете для четыреугольниковъ и семиугольниковъ?

13) Какія данныя вамъ нужно знать, чтобы построить четыреугольникъ и семиугольникъ равный данному?

14) Какъ можно построить многоугольникъ по частямъ?

Понятіе о подобіи фигуръ и пріемахъ построенія подобныхъ фигуръ.

I.

Въ элементарномъ курсѣ геометріи нѣтъ ни малѣйшей надобности проходить статью о подобіи фигуръ въ томъ видѣ какъ она излагается обыкновенно въ научныхъ курсахъ, т. е. на основаніи понятій о пропорціональности линій. Здѣсь достаточно наглядно познакомить учениковъ съ признаками и свойствами подобныхъ фигуръ и пріемами ихъ построенія, отлагая научное прохожденіе этой главы до систематическаго курса.

Въ статьѣ о прямой линіи ученики уже ознакомились съ способомъ уменьшенія и увеличенія прямыхъ въ зависимости отъ принятаго масштаба, поэтому здѣсь можно воспользоваться этими понятіями для болѣе естественнаго и легкаго перехода къ увеличенію и уменьшенію фигуръ. Преподаватель вычерчиваетъ на доскѣ какую нибудь фигуру — всего лучше треугольникъ, и предлагаетъ одному изъ хорошо рисующихъ учениковъ нарисовать ее отъ руки, въ уменьшенномъ видѣ. По собственноручномъ исправленіи копіи преподавателемъ дѣлается сравненіе копіи съ оригиналомъ.

Могутъ ли вычерченная и скопированная фигуры совмѣститься? Докажите отчего не могутъ.

— Каждая изъ сторонъ маленькой фигуры менѣе всѣхъ сторонъ большой *), а стало быть при наложеніи ни одна изъ сторонъ маленькой фигуры не можетъ совмѣститься съ какой либо стороной большой — слѣдовательно фигуры не совмѣстятся и не могутъ быть равными.

*) Можетъ быть и такой случай, что при уменьшеніи сторонъ фигуры въ извѣстное число разъ, самая большая сторона маленькой фигуры будетъ равною самой меньшей сторонѣ большой, но здѣсь слѣдуетъ брать такія фигуры и такую степень уменьшенія, чтобы доказательство неравенства было проще.

*

— Но не замѣчаете ли чего-либо общаго въ этихъ фигурахъ?

— Онѣ сходны по виду.

— Присмотритесь, не откроете ли—отчего происходитъ это сходство?—Равенство, совмѣстность фигуръ—помните—чѣмъ обусловливается?

— Равенствомъ частей, т. е. сторонъ и угловъ.

— Ну, стороны здѣсь очевидно неравны, а посмотрите на углы.—Не отъ равенства ли угловъ и зависитъ сходство по виду фигуръ?—Вычертите какой нибудь треугольникъ и потомъ другой треугольникъ съ соотвѣтственно равными углами и уменьшенными сторонами.

Вычертите пятиугольникъ и затѣмъ другой пятиугольникъ съ увеличенными сторонами, но соотвѣтственно равными углами.

Не сходны ли по виду вычерченныя пары треугольниковъ и пятиугольниковъ?

Не можете ли вычертить фигуръ различныхъ по виду, но у которыхъ углы были бы соотвѣтственно равные. На оборотъ, вычертите одинаковыя по виду фигуры съ неравными соотвѣтственно углами.

— Такъ отъ чего-же зависитъ сходство фигуръ по виду?

— Отъ равенства угловъ.

— А отъ чего зависитъ совмѣстимость фигуръ?

— Отъ равенства угловъ и сторонъ.

— Если мы вычертимъ двѣ фигуры, у которыхъ стороны и углы неравны, то могутъ ли онѣ выйти равными или сходными по виду?

— Нѣтъ онѣ выйдутъ *неравными и несходными по виду.*

— Фигуры сходныя по виду мы будемъ называть *подобными.*

Б вычертитъ на доскѣ какой нибудь треугольникъ, а затѣмъ другой, меньшій перваго, но подобный ему.

Отъ того, что треугольникъ сталъ меньше, что сдѣлалось съ углами? — А съ сторонами? — А нельзя ли еще больше уменьшить или увеличить стороны треугольника; не выйдетъ ли тогда треугольникъ подобный, если углы оставить тѣже?

II.

Вычертите треугольникъ и затѣмъ еще треугольникъ подобный первому, со сторонами увеличенными *втрое* противу сторонъ перваго треугольника. Вычертите еще одинъ треугольникъ подобный первому, у котораго одна сторона была бы увеличена *вдвое*, другая *втрое*, а третья осталась бы такою же какъ соотвѣтственная сторона перваго треугольника. Что вы получили въ обѣихъ задачахъ?

— Второй треугольникъ выходитъ съ соотвѣтственно равными углами съ первымъ и подобный ему, а третій выходитъ съ неравными первому углами и не подобный ему.

— А отъ чего это зависитъ—подумайте?

— Это зависитъ отъ того, что вы задали—не одинаково увеличить стороны перваго треугольника.

— Можно-ли въ треугольникѣ оставить углы тѣми же, а стороны уменьшить или увеличить не въ одно и тоже число разъ? — Значитъ для треугольниковъ равенство угловъ связано съ увеличеніемъ и уменьшеніемъ сторонъ въ одинаковое число разъ: если стороны увеличены или уменьшены не въ одинаковое число разъ, то углы выходятъ неравными и если углы остались равными, то увеличеніе или уменьшеніе было для всѣхъ сторонъ—въ одинаковое число разъ. Но такъ ли это и для четыреугольника, пятиугольника и вообще многоугольниковъ?—Вычертите четыреугольникъ съ прямыми углами. Вычертите другой четыреугольникъ съ прямыми углами, у котораго двѣ параллельныя стороны остались бы равными соотвѣтственнымъ сторонамъ перваго четыреугольника, а другія двѣ параллельныя былибы увеличены вдвое. Можно ли вычертить такой четыреугольникъ?—необходимо ли вамъ измѣнить углы четыреугольника?

— Нѣтъ, намъ удалось вычертить такой четыреугольникъ съ прямыми углами.

— Ну а подобенъ ли вычерченный вами четыреугольникъ первому—похожъ ли онъ на него?

— Нѣтъ неподобенъ.

— А какъ вы думаете отъ чего это произошло?

— Отъ того, что мы, построивъ въ другомъ четыреугольникѣ углы соотвѣтственно равные угламъ перваго, сдѣлали стороны втораго не въ одинаковое число разъ увеличенными противъ соотвѣтствующихъ сторонъ перваго.

— Значитъ, если бы мы разсматривали только одни треугольники, то какъ бы мы могли опредѣлить условія подобія?

— *Подобны такіе треугольники, у которыхъ углы соотвѣтственно равны.*

— А если говорить о прямолинейныхъ фигурахъ вообще— тогда какъ надо опредѣлить условія подобія?

— *Прямолинейныя фигуры, одинаковаго числа сторонъ, подобны, если углы ихъ соотвѣтственно равны и стороны одного въ одно и тоже число разъ больше или меньше сторонъ другаго.*

— Отчего вы дѣлаете такую разницу въ опредѣленіи?

— Потому что если въ треугольникахъ углы соотвѣтственно равны, то стороны неизбѣжно выходятъ или равными, или увеличенными или уменьшенными въ одинаковое число разъ, а въ четыреугольникахъ равенство угловъ не влечетъ еще за собой равенства, увеличенія или уменьшенія сторонъ въ одно и тоже число разъ—стало быть и *подобія* фигуръ. По этому, во второмъ опредѣленіи и прибавлено указаніе касающееся сторонъ.

III.

Чтобы построить фигуру подобную данной нужно знать:

1) Углы данной фигуры,

2) Стороны ея и

3) Во сколько разъ должны быть увеличены или уменьшены эти стороны.

Но вѣдь при построеніи фигуры всѣ ли углы и стороны вы откладываете? — Напримѣръ въ треугольникѣ всѣ ли углы и стороны вы откладываете?

— Нѣтъ не всѣ; мы можемъ отложить только однѣ стороны, или два угла и одну сторону, или же двѣ стороны и одинъ уголъ; остальныя части сами опредѣляются?

— А въ пятиугольникѣ?

— Мы откладываемъ четыре угла и три стороны, или всѣ стороны и только два угла, а остальныя части сами опредѣляются.

Многоугольники подобны, если состоятъ изъ треугольниковъ подобныхъ и одинаково расположенныхъ. На этомъ основаніи можно строить многоугольники подобные данному изъ треугольниковъ подобныхъ составляющимъ данный.

282) Вычертите восьмиугольникъ и затѣмъ другой подобный первому съ уменьшеніемъ сторонъ въ 2 раза.

Что вы будете измѣрять и откладывать?— Всѣ ли углы и стороны?—Сколько угловъ и сколько сторонъ?

— Мы можемъ измѣрить и отложить семь угловъ и шесть сторонъ или же пять угловъ и всѣ стороны.

283) Вычертить треугольникъ, измѣрить всѣ три стороны и затѣмъ построить подобный первому треугольникъ съ увеличеніемъ сторонъ въ $1^1/_2$ раза.

284) Вычертить шестиугольникъ, измѣрить въ немъ всѣ стороны и три угла и по этимъ даннымъ построить подобный шестиугольникъ съ уменьшеніемъ сторонъ въ 3 раза.

285) Построить треугольникъ, измѣрить въ немъ два угла и сторону и по этимъ даннымъ построить подобный первому треугольникъ съ увеличеніемъ сторонъ въ $1^1/_4$ раза.

286) Въ данномъ треугольникѣ измѣрить одинъ уголъ и двѣ стороны и по этимъ даннымъ построить треугольникъ подобный данному.

287) Установить три шеста на дворѣ (или три булавки на столѣ, три спички на полу и т. д.,) измѣрить три стороны образовавшагося треугольника и вычертить на бумагѣ треугольникъ съ уменьшеніемъ сторонъ въ нѣсколько разъ въ такомъ разсчетѣ, чтобы фигура помѣстилась на листѣ тетради.

288) Измѣрить три угла, образуемыхъ краями большой доски и длину двухъ краевъ доски, при помощи аршина и вычертить фигуру подобную фигурѣ доски на тетради принимая за аршинъ *вершокъ*.

289) Вычертить планъ двора, комнаты принимая сажень за вершокъ.

290) Садъ огороженъ заборомъ, который идетъ ломаной линіей состоящей изъ пяти прямыхъ участковъ; каждый участокъ забора въ 20 сажень длиною; извѣстны также три рядомъ лежащихъ угла, а именно: 100^0, 112^0 и 82^0. Вычертить фигуру этого сада, принимая на чертежѣ 1 вершокъ за 10 сажень.

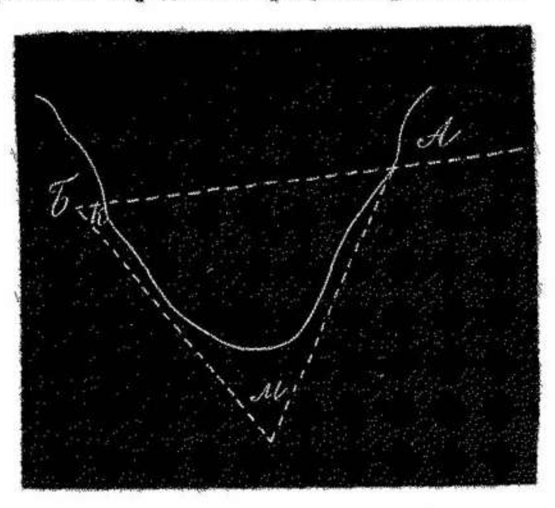
290) Дворъ имѣетъ четыреугольную фигуру, одинъ изъ угловъ образуемыхъ двумя сторонами его 96^0, а другой 112^0 и третій 53^0; прилежащія къ этимъ угламъ стороны 75 сажень и 125 сажень. Вычертить фигуру двора принимая $^1/_2$ верщка за 25 сажень и опредѣлить длину остальныхъ двухъ сторонъ двора.

291) На одномъ берегу рѣки стоятъ два дерева въ разстояніи 20 сажень одно отъ другаго, а на другомъ берегу стоитъ третье дерево. Спрашивается какъ опредѣлить разстояніе между третьимъ и первымъ деревьями не переходя на другую сторону рѣки?

— Нужно измѣрить при помощи астролябіи два угла. одинъ—между прямыми соединяющими первое дерево со вторымъ и первое съ третьимъ, а другой между прямыми, соединяющими первое дерево со вторымъ, а второе дерево съ третьимъ и затѣмъ по этимъ даннымъ построить треугольникъ.

— Положимъ углы, которые вамъ понадобились имѣютъ

слѣдующія величины: первый 45° а второй 63°. (*) Сдѣлайте построеніе и опредѣлите требуемое разстояніе.



292) Черезъ болото отъ мѣста А къ мѣсту Б хотятъ провести насыпную дорогу — гать и нужно знать длину этой дороги. Спрашивается какъ опредѣлить требуемое разстояніе, которое нельзя измѣрить по недоступности?

— Для этого въ мѣстахъ А и Б ставятъ шесты и еще шестъ гдѣ нибудь по берегу болота напримѣръ въ точкѣ С. Тогда образуется треугольникъ, который можно вычертить на тетради въ уменьшенномъ видѣ и такимъ образомъ опредѣлить требуемое разстояніе, которое вошло въ треугольникъ какъ сторона (АБ). Но чтобы вычертить образовавшійся треугольникъ необходимо измѣрить сторону БС и углы къ ней прилежащіе к и м или же стороны БС и АС и уголъ между ними м.

— Сдѣлайте это построеніе и опредѣлите длину сторонъ, если сторона БС—180 саж.,а АС—96 саж. и уголъ м—42°.

---

*) Гораздо лучше, если возможно, чтобы сами ученики хотя при искуственныхъ условіяхъ, напримѣръ при условныхъ преградахъ измѣряли-бы углы между сторонами обозначенными шестами, шпильками, булавками и т. д.

IV.

Всѣ круги и правильныя прямолинейныя фигуры съ одинаковымъ числомъ сторонъ ***подобны.***

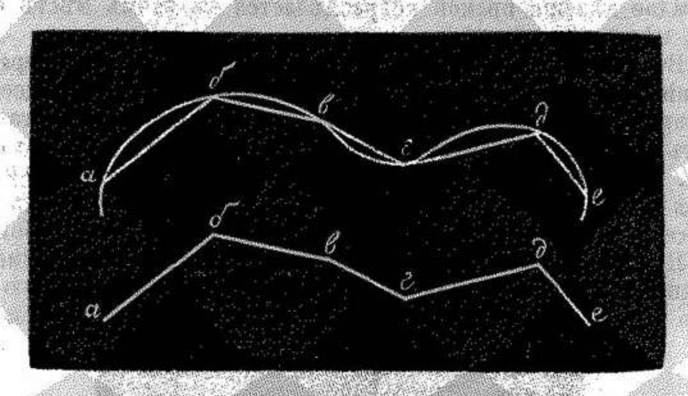
Подобіе круговъ очевидно; прямолинейныя же правильныя фигуры съ одинаковымъ числомъ сторонъ подобны, потому что всѣ углы и стороны ихъ равны между собою и углы всѣхъ правильныхъ фигуръ одинаковаго числа сторонъ равны. Если одна сторона какого либо правильнаго пятиугольника напримѣръ вдвое болѣе одной изъ сторонъ другаго правильнаго пятиугольника, то и всѣ стороны перваго—какъ равныя между собою—вдвое больше всѣхъ сторонъ втораго—какъ равныхъ между собою.

Пріемы вычерчиванія неправильныхъ кривыхъ криволинейныхъ фигуръ.

Самый простой способъ вычерчиванія кривыхъ въ настоящую величину заключается въ калькированіи ее на прозрачную бумагу, съ которой кривая уже переводится на бумагу. Но этотъ способъ представляетъ много неудобствъ: имъ можно копировать только кривую хорошо и отчетливо вычерченную и не длинную (п. ч. ни калькированіе, ни переводъ на бумагу не можетъ быть точенъ при большомъ листѣ, который всегда имѣетъ движеніе — въ одномъ мѣстѣ вытягивается, а въ другомъ морщитъ); при томъ же двойной переводъ кривой сначала на прозрачную бумагу, а потомъ на чертежъ ведетъ къ большимъ ошибкамъ. Но самый главный недостатокъ этого способа заключается въ томъ, что онъ примѣнимъ только тогда, когда кривая находится передъ вами во время построенія, а очень часто необходимо бываетъ на одномъ мѣстѣ измѣрять и записывать, а на другомъ чертить.

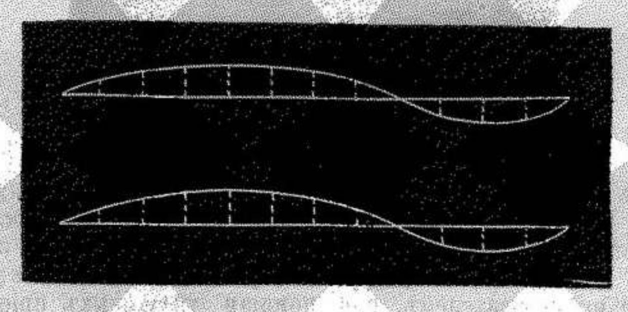
Существуетъ другой способъ примѣнимый во всѣхъ случаяхъ и дающій возможность строить кривыя уменьшая и увеличивая ихъ т. е. подобныя кривыя.

Всякая кривая можетъ быть подраздѣлена на части очень близкія къ дугамъ. Этимъ пользуются для изображенія кривой. Дѣлятъ ее на части близко подходящія къ дугамъ — кривымъ одинаковой кривизны; точки дѣленія соединяютъ



прямыми, отъ чего получается ломаная, которую наносятъ на чертежѣ; затѣмъ находятъ радіусъ каждой части и проводятъ дуги черезъ точки *а* и *б*, потомъ черезъ *б* и *в* и такъ далѣе.

Поступаютъ и иначе: соединяютъ концы кривой прямою которую дѣлятъ на нѣсколько частей — чѣмъ больше тѣмъ лучше; изъ точекъ дѣленія въ сторону кривой возставляютъ



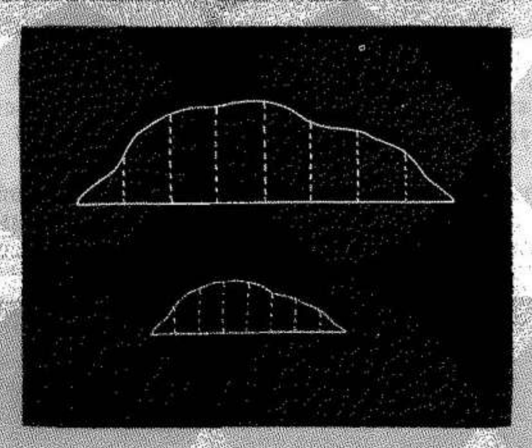
перпендикуляры до пересѣченія съ кривою. Затѣмъ вычерчиваютъ прямую равную проведенной, раздѣляютъ ее на тоже число частей, проводятъ перпендикуляры, на которыхъ по отстояніямъ точекъ кривой отъ прямой назначаютъ рядъ

точекъ кривой; наконецъ каждыя три точки лежащія рядомъ соединяютъ дугами.

Въ мѣстахъ гдѣ кривая быстрѣе мѣняетъ свою кривизну, необходимо больше перпендикуляровъ и точекъ, а потому каждое дѣленіе прямой подраздѣляется въ этомъ мѣстѣ еще на нѣсколько частей.

Въ томъ случаѣ если не нужно слишкомъ точное перенесеніе всѣхъ изгибовъ кривой, когда важно только общее ея направленіе—тамъ кривую проводятъ отъ руки и возставляютъ немного перпендикуляровъ. Такъ при съемкѣ плана озера, положимъ, нѣтъ возможности, да и надобности наносить всѣ изгибы берега, почему и ограничиваются вѣрнымъ нанесеніемъ только общаго направленія и крупныхъ изгибовъ.

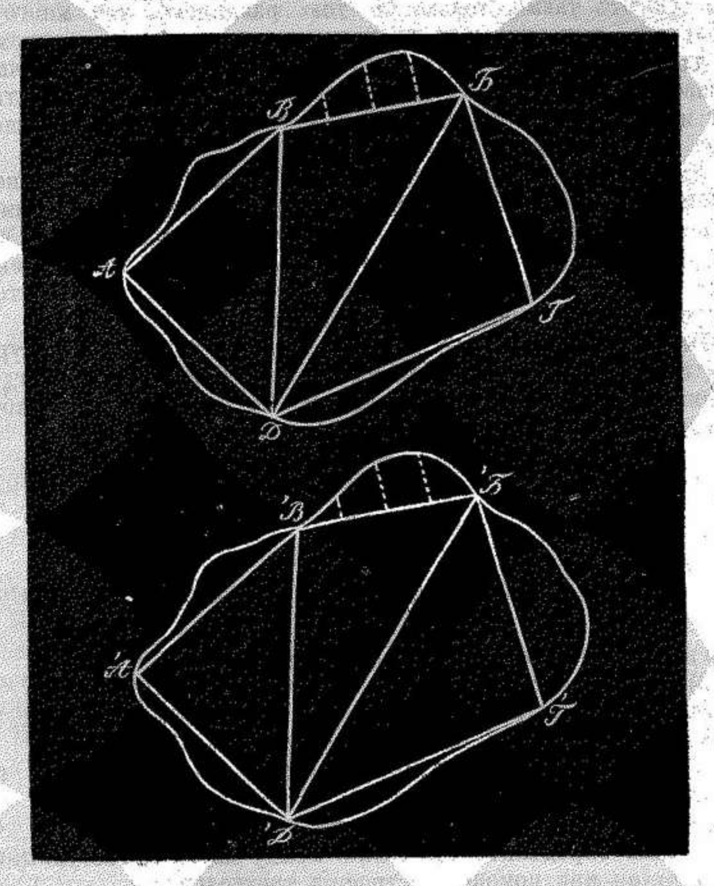
При такомъ способѣ нанесенія кривой возможно и уменьшеніе и увеличеніе ее. Если желаемъ уменьшить кривую въ два раза, то проводимъ прямую вдвое меньшую и откладываемъ по перпендикулярамъ вдвое меньшей длины прямыя, оставляя число дѣленій тоже самое. Ученики упражняются въ копированіи кривыхъ въ настоящую величину съ рисунковъ, съ моделей, съ фигуръ вычерчиваемыхъ на доскѣ и на столѣ преподавателемъ, при помощи указанныхъ пріемовъ, а также вычерчиваютъ кривыя съ чертежа или съ натуры въ уменьшеніи и увеличеніи по данному масштабу.



Всего лучше для такихъ упражненій землемѣрныя экскурсіи на дворѣ, въ саду или даже въ полѣ. На этихъ экскурсіяхъ

ученики дѣлаютъ измѣренія, записываютъ ихъ и по приходѣ домой, въ классѣ вычерчиваютъ очертанія забора, берега, рѣки или пруда и т. д.

Неправильныя криволинейныя фигуры равныя и подобныя даннымъ, вычерчиваются при помощи прямолинейныхъ фигуръ, вершины которыхъ лежатъ на кривой—на обводѣ криволинейной фигуры.



Если мы хотимъ построить криволинейную фигуру равную данной, то раздѣляемъ эту послѣднюю на такія части, у ко-

торыхъ кривизна была бы по возможности одинакова; точки дѣленія соединяютъ прямыми, отъ чего и образуется многоугольникъ АБВГДЕ. Раздѣливъ этотъ многоугольникъ на треугольники, строятъ равный ему многоугольникъ, составляя его изъ треугольниковъ. Участки кривой между вершинами многоугольника наносятъ по выше изложенному пріему.

При построеніи криволинейной фигуры подобной данной поступаютъ также, только съ тою разницею, что многоугольникъ вычерчиваютъ не равнымъ, а подобнымъ данному и длины перпендикуляровъ, по которымъ наносятся точки кривой уменьшаются и увеличиваются по принятому масштабу или вообще сообразно данному увеличенію или уменьшенію сторонъ многоугольника.

Для упражненія учениковъ въ вычерчиваніи равныхъ и подобныхъ криволинейныхъ фигуръ преподаватель даетъ имъ простенькіе рисунки и чертежи, вычерчиваетъ у нихъ въ тетради, на классной доскѣ, на полу, на дворѣ криволинейныя фигуры, которыя и вычерчиваются учениками въ настоящую величину, уменьшенными или увеличенными.

Независимо отъ этого полезно сдѣлать нѣсколько экскурсій съ цѣлію составленія плана пруда, рѣчки, сада, поля гдѣ ученикамъ приходится вычерчивать въ данномъ масштабѣ кривыя обводы береговъ, очертаній клумбъ и т. д.

Вопросы для повторенія.

1) Что называли мы подобными фигурами?

2) Что можете вы сказать о частяхъ подобныхъ фигуръ?— Какъ должны быть увеличены или уменьшены стороны у одной изъ подобныхъ фигуръ относительно другой?

3) Какая разница въ условіяхъ подобія треугольниковъ и многоугольниковъ?

4) Какъ построить треугольникъ подобный данному?

5) Какъ опредѣлить разстояніе между двумя недоступными предметами при помощи построенія треугольника?

6) Какъ построить многоугольникъ подобный данному?

7) Какія изъ правильныхъ фигуръ подобны между собою?

8) Какъ вычертить кривую въ настоящую величину при помощи прозрачной бумаги? Въ чемъ заключаются неудобства этого способа?

9) Въ чемъ заключается другой пріемъ — болѣе удобный для вычерчиванія кривыхъ въ настоящую величину?

10) Какъ вычертить кривую уменьшенную или увеличенную въ нѣсколько разъ?

11) Какъ вычертить неправильную фигуру равную или подобную данной?

О площадяхъ.

I.

Въ прямолинейныхъ фигурахъ одна изъ сторонъ преимущественно нижняя принимается за *основаніе фигуры*, тогда прямая перпендикулярная къ основанію и проходящая черезъ самую дальнюю отъ основанія вершину называется *высотой фигуры*.

Въ прямолинейныхъ треугольникахъ и четыреугольникахъ за основаніе и высоту могутъ быть приняты стороны прямаго угла.

293) Построить нѣсколько многоугольниковъ и прочертить потолще основаніе и высоту въ каждомъ изъ нихъ.

Правильный четыреугольникъ, имѣющій равныя стороны и прямые углы мы будемъ называть *квадратомъ*, а четыреугольникъ съ прямыми углами (но неравными сторонами) будемъ называть *прямоугольникомъ*.

Вычертите какой нибудь квадратъ и затѣмъ прямоугольникъ, у котораго двѣ параллельныя стороны равны сторонамъ квадрата, а остальныя 2 вдвое меньше сторонъ квадрата.

Равны-ли вычерченныя фигуры? —Которая изъ нихъ больше?—Которая изъ нихъ заключаетъ въ себѣ больше мѣста?— Если бы мы внутри квадрата и прямоугольника наложили слой зернышекъ гречневыхъ, рисовыхъ или какихъ другихъ,

вкладая ихъ одно въ одному, то внутри какой фигуры помѣстилось бы болѣе зеренъ? — Отчего вы думаете, что внутри первой фигуры помѣстилось бы вдвое больше?

— Потому что въ ней мѣста вдвое больше чѣмъ въ первой, что можно доказать наложеніемъ. Если вторую фигуру наложить на первую, то она займетъ собою ровно половину первой—стало быть въ ней ровно вдвое менѣе мѣста нежели въ первой.

— Если у насъ одна комната квадратная, а другая имѣетъ полъ въ видѣ прямоугольника, у котораго двѣ стороны равны сторонамъ пола квадратной комнаты, а остальныя двѣ вдвое меньше сторонъ квадратнаго пола, то въ какой комнатѣ помѣстится больше мебели, если бы мы уставили ихъ сплошь мебелью—и во сколько разъ больше?

294) Вычертите какой нибудь квадратъ и потомъ прямоугольникъ, у котораго двѣ стороны вдвое больше сторонъ квадрата, а остальныя двѣ вдвое меньше послѣднихъ.

Равны ли вычерченныя фигуры? — Не подобны ли онѣ?— А въ которой изъ нихъ больше мѣста? — Какъ вы можете доказать что въ обѣихъ фигурахъ, несмотря на неравенство, несовмѣстимость ихъ—мѣста одинаковое количество.

— Если раздѣлимъ пополамъ т. е. на два прямоугольника вторую фигуру поперечною прямою, то изъ получившихся прямоугольниковъ мы можемъ составить точно такой же—квадратъ, какъ первая фигура, для этого стоитъ только приставить одинъ прямоугольникъ къ другому длинными сторонами. Тогда маленькія стороны наставятъ однадругую, отъ чего составятся прямыя равныя сторонамъ квадрата потому что каждая изъ маленькихъ сторонъ есть половина этой стороны; большія стороны, которыя образовались отъ раздѣленія пополамъ сторонъ вдвое большихъ стороны квадрата—будутъ равны послѣдней и углы сложенной фигуры останутся прямыми.

— Мѣсто внутри фигуры мы будемъ называть *площадью*, такъ какъ это принято называть всѣми.

295) Вычертите квадратъ и затѣмъ прямоугольникъ вдвое большей площади.

Отчего вы полагаете, что вычерченный вами квадратъ имѣетъ площадь вдвое меньшую чѣмъ прямоугольникъ?

— Потому что квадратъ, по наложеніи на прямоугольникъ, помѣстится на немъ ровно два раза.

296) Вычертите прямоугольникъ, который бы имѣлъ площадь равняющуюся $^2/_3$ площади квадрата.

Какъ вы это сдѣлали?

— Мы раздѣлили двѣ противулежащія стороны на три части, точки дѣленія соединили по двѣ, отъ чего квадратъ раздѣлился у насъ на три равныя прямоугольныя части. Затѣмъ мы вычертили прямоугольникъ, составляющійся изъ двухъ такихъ частей, который стабо-быть и равенъ $^2/_3$-мъ квадрата.

297) Вычертить прямоугольникъ, котораго площадь была бы въ $1^1/_2$, $2^1/_2$, $2^1/_4$, $2^3/_4$ и т. д. раза больше площади даннаго квадрата.

298) Вычертить два прямоугольника, изъ которыхъ площадь перваго была бы въ 2, $2^1/_2$, $1^3/_4$ и т. д. раза больше или меньше площади другаго.

299) Построить квадратъ равный площадью прямоугольнику, котораго основаніе *вчетверо* больше высоты.

300) Вычертить прямоугольникъ и затѣмъ другой равной съ первымъ площади, но такой, у котораго основаніе было бы вдвое, втрое, вчетверо и т. д. меньше или больше перваго.

301) Построить два квадрата, изъ которыхъ стороны перваго были бы вдвое больше сторонъ втораго и опредѣлить во сколько разъ площадь одного будетъ больше площади другаго.

302) Построить квадратъ со сторонами въ 1 вершокъ длиною и затѣмъ другой квадратъ, площадь котораго была бы въ 4, 9, 16 и т. д. разъ больше или меньше площади перваго.

303) Вычертить два прямоугольника съ равными основаніями и равными площадями и опредѣлить, у котораго изъ прямоугольниковъ высота будетъ больше?

304) Построить два прямоугольника съ равными высотами и равныхъ площадей и узнать, у котораго изъ прямоугольниковъ основаніе будетъ больше?

305) Построить два прямоугольника равныхъ площадей, изъ которыхъ высота одного была бы вдвое больше чѣмъ у другаго и опредѣлить, у котораго изъ нихъ основаніе будетъ больше и во сколько разъ больше?

306) Построить два прямоугольника равныхъ площадей, изъ

которыхъ у перваго основаніе было бы вдвое больще чѣмъ у втораго и узнать, у котораго изъ нихъ высота будетъ больше и во сколько разъ больше?

307) Построить два прямоугольника равныхъ площадей, изъ которыхъ у перваго основаніе было бы втрое, вчетверо и т. д. больше чѣмъ у втораго и опредѣлить, у котораго изъ нихъ высота будетъ больше и во сколько разъ больше?

308) Вычертить два прямоугольника равныхъ площадей, изъ которыхъ у перваго высота была бы втрое, вчетверо и т. д.больше чѣмъ у другаго и узнать—у котораго изъ нихъ основаніе выходитъ больше и во сколько разъ больше?

309) Построить два прямоугольника съ равными высотами, изъ которыхъ у перваго площадь была бы вдвое, втрое, вчетверо и т.д. больше чѣмъ у другаго и опредѣлить—у котораго изъ нихъ основаніе выходитъ больше и во сколько разъ больше?

310) Вычертить два прямоугольника съ равными основаніями, изъ которыхъ у перваго площадь была бы вдвое, втрое, вчетверо и т.д. больше чѣмъ у втораго и опредѣлить—у котораго изъ нихъ высота выйдетъ больше и во сколько разъ больше?

311) Построить прямоугольникъ съ высотою въ 1 вершокъ и основаніемъ въ $1^1/_2$ вершка и затѣмъ другой прямоугольникъ, у котораго площадь была бы вдвое больше перваго и основаніе было бы въ $^3/_4$ вершка.

Раздѣлываніе этихъ задачъ имѣетъ цѣлію познакомить учениковъ съ тѣмъ фактомъ, что величина площади зависитъ отъ величины основанія и высоты въ прямоугольникахъ.

Въ результатѣ этой работы устанавливаются слѣдующіе выводы:

1) Прямоугольники съ равными основаніями и высотами имѣютъ равныя площади.

2) Равноплощадные прямоугольники съ равными основаніями имѣютъ равныя высоты, а съ равными высотами— равныя основанія.

3) Равноплощадные прямоугольники, у которыхъ основанія неравны, имѣютъ неравныя высоты. Если основаніе одного прямоугольника вдвое больше основанія другаго, то высота перваго вдвое меньше высоты втораго.

4) Если два прямоугольника имѣютъ равныя основанія и неравныя высоты, то и площади ихъ неравны; если высота

одного изъ нихъ вдвое, втрое, вчетверо и т. д. больше высоты другаго, то и площадь его вдвое, втрое, въ четверо и т. д. больше площади другаго.

5) У прямоугольниковъ неравныхъ площадей, съ равными основаніями высоты неравны; если площадь одного прямоугольника вдвое, втрое, вчетверо и т. д. больше площади другаго, тогда и высота перваго будетъ вдвое, втрое, вчетверо и т. д. больше высоты перваго. Если у такихъ прямоугольниковъ высоты равны, то основаніе перваго будетъ вдвое, втрое, вчетверо больше основанія втораго.

312) Вычертить нѣсколько равновысотныхъ прямоугольниковъ и затѣмъ построить прямоугольникъ площадью равный суммѣ всѣхъ первыхъ.

313) Вычертить два прямоугольника съ равными основаніями и потомъ третій, площадь котораго была бы равна разности между площадями первыхъ двухъ.

314) Построить прямоугольникъ площадью равный нѣсколько разъ взятой площади даннаго прямоугольника.

315) Построить прямоугольникъ площадью равный одной или нѣсколькимъ частямъ даннаго прямоугольника.

316) У меня есть квадратный листъ бумаги, сторона котораго въ $1^1/_2$ аршина. Мнѣ нужно отрѣзать отъ него прямоугольный кусокъ площадью равный $^3/_4$ моего листа. Спрашивается какой ширины и длины будетъ отрѣзанный прямоугольный кусокъ?

317) У садовника подъ земляникой былъ участокъ земли квадратной фигуры, сторона котораго равнялась 25 саженямъ а подъ огурцы онъ отмѣрилъ участокъ такой же самой площади и прямоугольной фигуры шириной въ $12^1/_2$ саженъ. Какой длины былъ участокъ отведенный подъ огурцы?

317) Вычертите треугольникъ, который площадью былъ бы въ половину даннаго квадрата.

Какъ вы это сдѣлали?

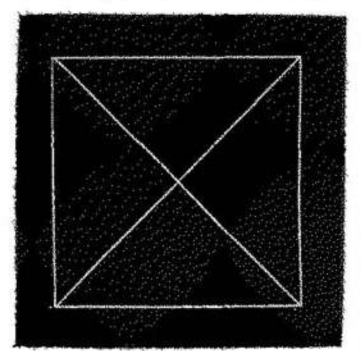
— Мы раздѣлили квадратъ на два равные треугольника прямою, соединяющею вершины противуположныхъ угловъ и вычертили треугольникъ равный одному изъ получившихся въ квадратѣ. Площадь вычерченнаго такимъ образомъ треугольника будетъ равна половинѣ площади квадрата, потому что полученные при раздѣленіи квадрата треугольники равны между собою.

*

319) Вычертить треугольникъ площадью равный половинѣ площади даннаго прямоугольника.

— Какъ вы это сдѣлали?

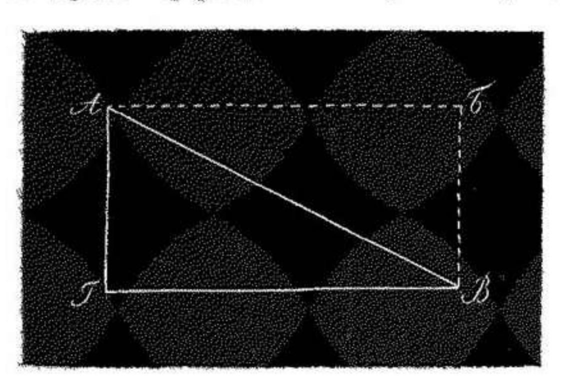
— Мы раздѣлили прямоугольникъ на два равные треугольника прямою соединяющею вершины противуположныхъ угловъ и затѣмъ вычертили треугольникъ равный образовавшимся треугольникамъ.



320) Вычертить треугольникъ равный $1/4$, $1/6$, $1/8$ и т. д. площади прямоугольника.

— Для этого квадратъ или прямоугольникъ раздѣляются на 2, на 3, на 4 и т. д. равныхъ прямоугольника, которые въ свою очередь раздѣляются на два равныя треугольника. Площадь каждаго изъ получившихся треугольниковъ будетъ въ $1/4$, $1/6$, $1/8$ и т. д. площади квадрата или прямоугольника. Если вычертить теперь треугольникъ равный образовавшимся по раздѣленіи, то онъ и будетъ площадью въ $1/4$, $1/6$, $1/8$ и т. д. данной фигуры.

321) Вычертить треугольникъ съ прямымъ угломъ и за



тѣмъ прямоугольникъ площадью вдвое большій площади треугольника.

— Какъ вы это сдѣлаете?

— Отъ вершинъ острыхъ угловъ мы проведемъ прямыя,

составляющія съ сторонами прямаго угла прямые углы, тогда образуется прямоугольникъ АБВГ, который прямою АВ раздѣленъ на два равныхъ треугольника, такихъ какъ данный. Теперь, если мы вычертимъ прямоугольникъ равный АБВГ, то онъ и будетъ площадью вдвое больше даннаго треугольника.

322) Вычертить треугольникъ, площадью равный площади даннаго прямоугольника.

— Двѣ противуположныя стороны даннаго прямоугольника продолжаются, такъ чтобы продолженія были равны продолженнымъ сторонамъ. По соединеніи концевъ продолженныхъ сторонъ образуется прямоугольникъ вдвое большій даннаго. Если полученный такимъ построеніемъ прямоугольникъ раздѣлить на два равные треугольника, то площадь каждаго изъ нихъ будетъ вдвое меньше площади большаго прямоугольника и равна площади даннаго.

323) Построить прямоугольникъ, площадью равный площади даннаго треугольника съ прямымъ угломъ.

324) Вычертить прямоугольникъ и прямоугольный треугольникъ съ одинаковыми основаніемъ и высотою, при чемъ за основаніе и высоту треугольника принять стороны прямаго угла и опредѣлить—у которой изъ фигуръ площадь будетъ больше и во сколько разъ больше?

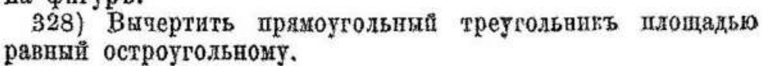
325) Вычертить прямоугольникъ и треугольникъ съ прямымъ угломъ равной площади и опредѣлить—у которой изъ фигуръ основаніе и высота выйдутъ больше и во сколько разъ?

— У треугольника высота вдвое больше чѣмъ у прямоугольника, а основаніе у обоихъ одинаковое.

326) Вычертить треугольникъ съ прямымъ угломъ площадью вдвое, втрое, вчетверо и т. д. больше даннаго прямоугольника.

327) Вычертить остроугольный треугольникъ и затѣмъ прямоугольникъ площадью вдвое большій первой фигуры т. е. треугольника.

Пріемъ построенія виденъ на фигурѣ.



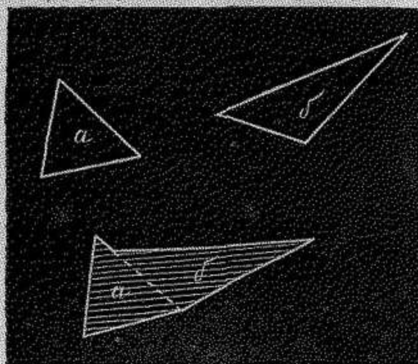
328) Вычертить прямоугольный треугольникъ площадью равный остроугольному.

329) Вычертить два неравныхъ треугольника съ равными основаніями и высотами и опредѣлить—у котораго изъ нихъ площадь больше?

330) Вычертить два неравныхъ, но равноплощадныхъ треугольника съ равными основаніями и измѣрить высоту.

Въ результатѣ этой работы установляются слѣдующія положенія:

1) Треугольникъ и прямоугольникъ равныхъ высотъ и основаній неравны площадями; изъ нихъ у прямоугольника площадь вдвое больше чѣмъ у треугольника.

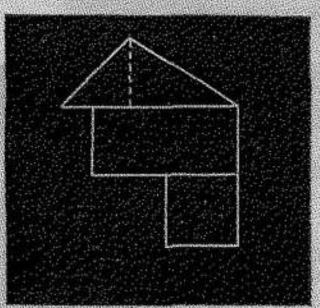


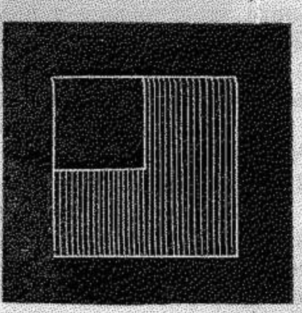
2) У треугольниковъ равныхъ высотъ и основаній площади равны.

331) Вычертить два треугольника и затѣмъ еще одну фигуру, площадью равную суммѣ площадей треугольниковъ *).

332) Изъ двухъ прямоугольныхъ треугольниковъ, квадрата и прямоугольника составить фигуру площадью равную суммѣ площадей указанныхъ фигуръ.

333) Вычертить фигуру площадью равную разности площадей двухъ данныхъ квадратовъ.



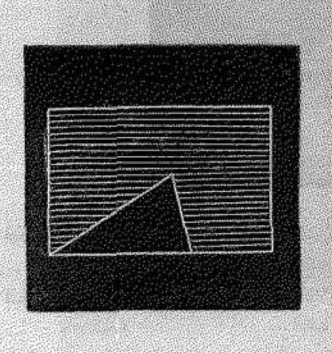


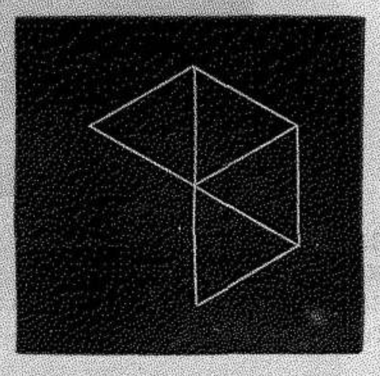
334) Построить фигуру, площадь которой была бы равна

*) Пріемъ построенія этой и нѣсколькихъ послѣдующихъ задачъ указаны на чертежѣ.

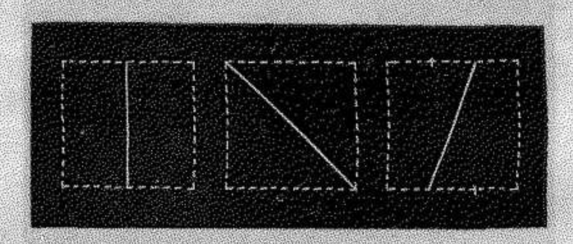
разности между площадями данныхъ прямоугольника и треугольника.

335) Построить фигуру клощадью въ 5 разъ большую площади даннаго треугольника.

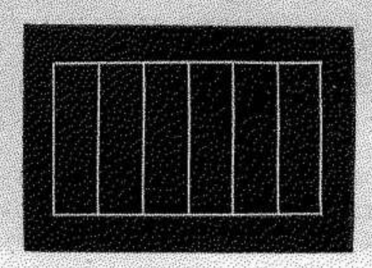




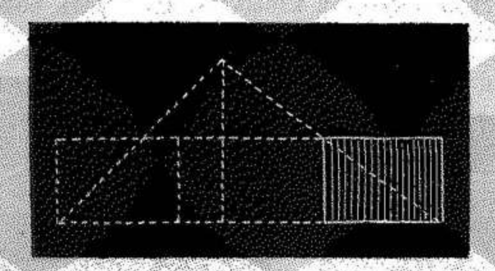
336) Вычертить квадратъ и раздѣлить его на 2, на 3, 4, 5, и т. д. равныхъ между собою частей.



337) Прямоугольникъ раздѣлить на 3, 6, 8 и т. д. равномѣрныхъ частей.

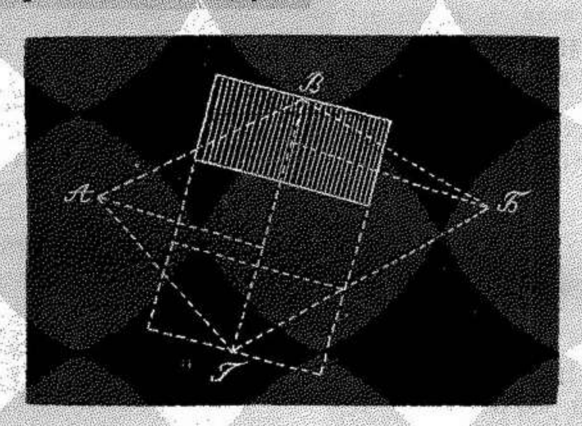


338) Вычертить треугольникъ и затѣмъ еще фигуру площадью равную $^1/_3$ площади треугольника.



339) Вычертить фигуру площадью вчетверо меньшею площади даннаго треугольника.

340) Вычертить фигуру площадью равную $^1/_3$ площади даннаго неправильнаго четыреугольника.



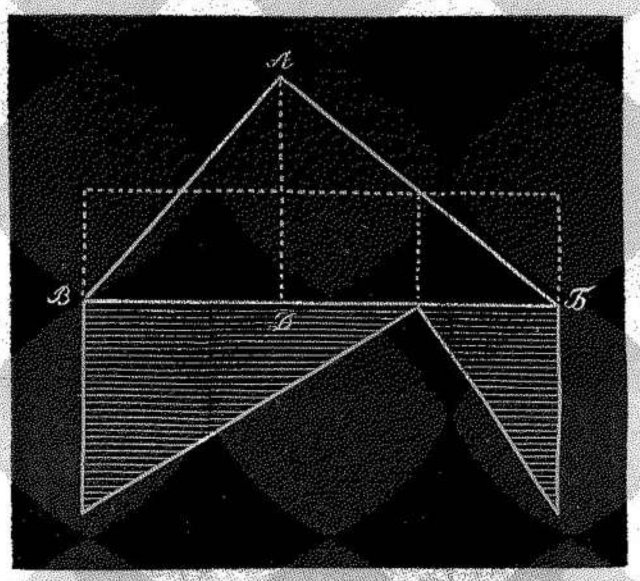
341) Построить треугольникъ площадью равный суммѣ площадей двухъ равныхъ квадратовъ.

342) Вычертить треугольникъ, площадью равный суммѣ площадей трехъ равныхъ квадратовъ.

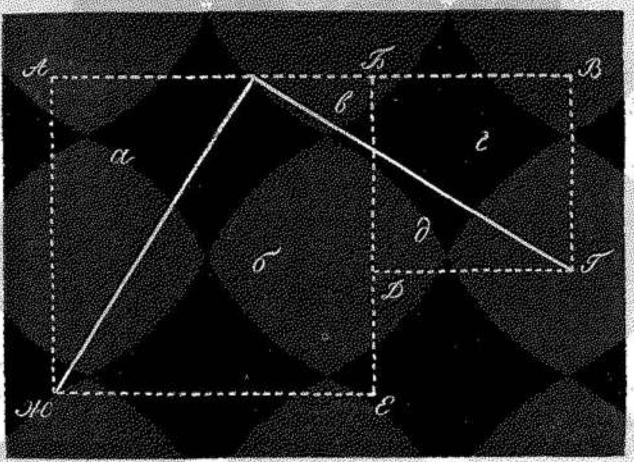
343) Построить два треугольника, сумма площадей которыхъ была бы равна данному прямоугольнику.

344) Построить два треугольника, изъ которыхъ площадь перваго была бы вдвое больше площади втораго и сумма

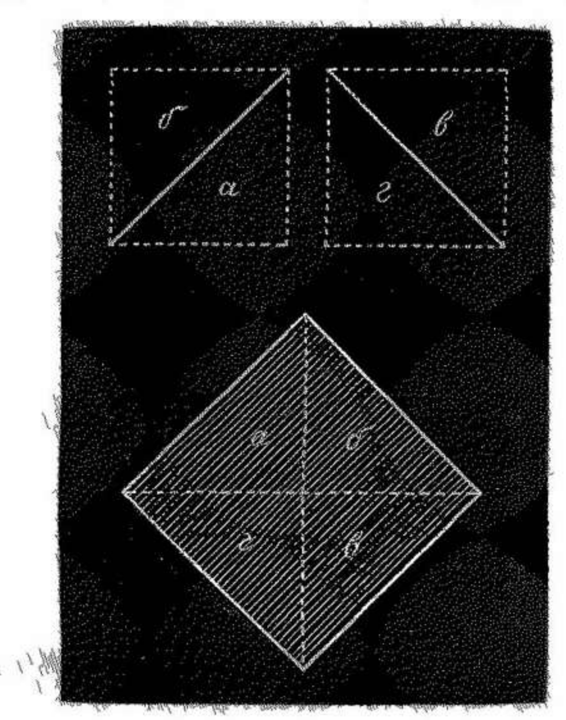
площадей ихъ была бы равна площади даннаго треугольника.



345) Построить квадратъ площадью равный суммѣ площадей двухъ данныхъ, неравныхъ квадратовъ.



346) Вычертить два равныхъ квардата и затѣмъ третій, площадь котораго равнялась бы суммѣ площадей первыхъ.



347) Вычертить прямоугольный треугольникъ, площадью равный суммѣ площадей двухъ данныхъ и равныхъ треугольниковъ.

Мѣра площадей.

До сихъ поръ мы сравнивали площади различныхъ фигуръ и находили, что площадь одной изъ нихъ равна, больше или меньше во сколько нибудь разъ площади другой фигуры. Это намъ давало возможность судить о величинѣ нѣкоторыхъ площа-

дей — нетолько тѣхъ которыя у насъ передъ глазами, но и тѣхъ которыхъ мы никогда невидѣли. Если я скажу вамъ, напримѣръ, что площадь пола моей комнаты вдвое меньше пола этого класса и равна площади пола сосѣдней комнаты, то вы можете себѣ составить понятіе о площади пола моей комнаты. Но вѣдь это я вамъ могу сказать только тогда, если я сравнивалъ площади пола моей комнаты съ площадями этихъ двухъ комнатъ, а вы знаете что сравненіе это возможно только для того кто знаетъ, видѣлъ и вымѣрялъ эти комнаты. А если бы я также сказалъ о площади моей комнаты тому кто не видалъ и не измѣрялъ этихъ двухъ комнатъ, то могъ ли бы онъ судить о томъ какъ велика площадь моей комнаты? Конечно нѣтъ. А нельзя ли такъ опредѣлить величину неизвѣстной площади, чтобы всякій, незнакомый съ площадью какой нибудь нашей комнаты тоже могъ судить о величинѣ неизвѣстной площади? Помните какъ мы опредѣляли и опредѣляемъ длину линій такъ, чтобы всѣ не видавшіе длину какой нибудь нашей линіи могли судить о длинѣ неизвѣстной имъ линіи.

— Мы измѣряли линію и опредѣляли ее въ мѣрахъ длины, т. е. говорили сколько въ ней заключается извѣстныхъ всѣмъ условныхъ мѣръ длины.

— А какія мѣры употребляли мы для измѣренія линій?

— Линейныя мѣры — мѣры длины.

— Нельзя ли площадь измѣрить посредствомъ линейной мѣры, напримѣръ: аршина, фута, дюйма и т. д.

— Нѣтъ нельзя, этими мѣрами измѣряютъ не площади, а линіи.

— А нельзя ли измѣрить площадь мѣрою угловъ?—Ну а какую бы мѣру необходимо было для измѣренія площадей?

— Какую нибудь площадь

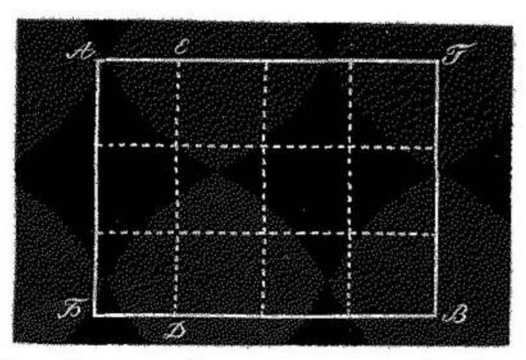
— Обыкновенно измѣряютъ площади *квадратными мѣрами*—это квадратики опредѣленной площади.

Подобно тому какъ для измѣренія линій существуютъ нѣсколько мѣръ, и для измѣренія площадей употребляются нѣсколько мѣръ различной величины: *квадратная верста*, *квадратная сажень*, *квадратный футъ*, *квадратный дюймъ*, *квадратный аршинъ*, *квадратный вершокъ* и т. д. Квадратная верста—это квадратъ, стороны котораго равняются верстѣ; квадратная сажень—квадратъ со сторонами въ сажень

и т. д.—Что же значитъ измѣрить какую нибудь данную площадь?

— Значитъ узнать — сколько въ ней какихъ нибудь изъ поименованныхъ квадратныхъ мѣръ—т. е. сколько разъ такая мѣра содержится въ данной площади.

348) Вычертить прямоугольникъ, у котораго двѣ противуположныя стороны были бы въ 3 дюйма, а остальныя сто-



роны въ 4 дюйма и измѣрить площадь этой фигуры квадратнымъ дюймомъ.

Какъ вы будете измѣрять?

— Мы станемъ накладывать квадратный дюймъ на прямоугольникъ и замѣтимъ сколько разъ этотъ дюймъ на немъ помѣщается.

— Какъ-же вы будете прикладывать—откуда начнете?

— Мы сначала будемъ прикладывать квадратики такъ, чтобы они прилегали одной изъ своихъ сторонъ къ какой нибудь сторонѣ даннаго прямоугольника напр. къ сторонѣ АБ. У этой стороны такихъ квадратиковъ помѣстится ровно три п. ч. она въ три дюйма, а сторона квадрата въ одинъ дюймъ. Потомъ къ линіи ЕД образовавшейся изъ сторонъ наложенныхъ квадратиковъ мы будемъ прикладывать новыя квадратики, которые составятъ собою второй рядъ; и въ этомъ второмъ ряду улеглось три квадратика. Продолжая такое укладываніе квадратиковъ покуда можно мы узнаемъ что по площади даннаго прямоугольника уложилось всего 12 квадратиковъ—стало быть она равна 12-ти квадратнымъ дюймамъ.

349) Вычертить прямоугольникъ въ 4 дюйма высотою съ

основаніемъ въ 5 дюймовъ и измѣрить площадь его съ помощію квадратнаго дюйма (вырѣзаннаго изъ бумаги).

— Сколько квадратиковъ помѣстилось въ ряду (по высотѣ)?—А нельзя ли помѣстить больше? — Отъ чего нѣтъ?— А нельзя ли не накладывая узнать сколько ихъ помѣстится по высотѣ?

— Мы знаемъ что высота въ 4 дюйма, значитъ если по ней будемъ укладывать квадратики въ рядъ, то можемъ положить только 4 квадратика п. ч. стороны квадратика въ 1 дюймъ.

— А по скольку будетъ во второмъ, въ третьемъ и такъ далѣе рядахъ?

— По стольку же.

— Отъ чего?

— Потому что прямыя, которыя раздѣляютъ ряды выходятъ равными высотѣ, а стало быть и къ нимъ можно приложить по стольку же квадратиковъ сколько приложили къ высотѣ.

— А нельзя ли знать безъ укладыванія квадратиковъ сколько выйдетъ рядовъ? Какова ширина ряда? Такъ сколько рядовъ помѣстится на данной площади?

— Пять рядовъ п. ч. основаніе прямоугольника въ пять дюймовъ, а ширина ряда въ одинъ дюймъ.

— А если мы знаемъ сколько помѣстится квадратиковъ въ рядѣ и сколько такихъ рядовъ, то неможемъ ли безъ наложенія узнать сколько уложится всѣхъ квадратиковъ на данной площади?

— Тогда нужно *число квадратиковъ въ рядѣ умножить на число рядовъ*.

350) Измѣрить площадь стола, доски, листа бумаги и т. д. квадратными вершками?

Какъ вы сдѣлаете эту задачу?—Нуженъ ли вамъ квадратный вершокъ?

— Нѣтъ, мы измѣримъ линейнымъ вершкомъ высоту т. е. узнаемъ сколько въ ней вершковъ — это намъ покажетъ сколько квадратныхъ вершковъ помѣстится въ каждомъ ряду, если ихъ будемъ класть по направленію высоты, затѣмъ измѣримъ основаніе т. е. узнаемъ сколько въ немъ вершковъ—это покажетъ сколько рядовъ квадратныхъ вершковъ помѣстится по всей площади. Число квадратныхъ вершковъ

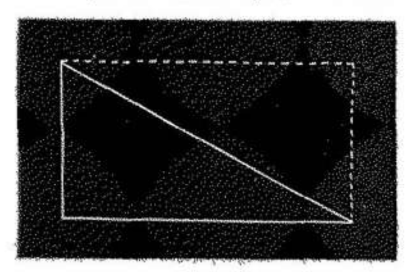
въ ряду взятое столько разъ сколько всѣхъ рядовъ покажетъ число всѣхъ квадратныхъ вершковъ въ измѣряемой площади.

Чѣмъ отличается измѣреніе площади квадрата отъ измѣренія площади прямоугольника?

— Такъ какъ въ квадратѣ всѣ стороны равны, а стало быть и высота и основаніе, которыя направляются по сторонамъ также равны, то число квадратныхъ мѣръ въ рядѣ будетъ равно числу рядовъ. Поэтому при измѣреніи площади квадрата достаточно узнать — сколько рядовъ кв. мѣръ помѣщается по основанію или высотѣ и умножить полученное число само на себя.

351) Вычертить какой нибудь прямоугольный треугольникъ и измѣрить площадь его кв. дюймами, принимая за основаніе фигуры одну изъ сторонъ прямаго угла и разсказать какъ нужно дѣлать эту задачу.

— Дополняемъ треугольникъ въ прямоугольникъ и измѣряемъ площадь послѣдняго, а затѣмъ число кв. дюймовъ этой площади дѣлимъ на 2 п. ч площадь построеннаго прямоугольника ровно вдвое больше площади даннаго треугольника.



352) Вычертить какой нибудь треугольникъ и измѣрить его площадь.

На основаніи треугольника строится прямоугольникъ высотою равный высотѣ треугольника; площадь этого прямоугольника вдвое большая площади треугольника измѣряется и полученное число квадр. мѣръ раздѣляется на 2.

Для устраненія излишней работы построенія вспомогательныхъ прямоугольниковъ, при измѣреніи площадей треугольниковъ, необходимое вначалѣ, подъ конецъ можетъ быть устранено; достаточно, чтобы ученики каждый разъ вспоминали что такой прямоугольникъ имѣетъ площадь вдвое большую площади даннаго треугольника и площадь удобноизмѣряемую кв. мѣрами.

353) Портной отрѣзалъ кусокъ сукна длиною въ 5 аршинъ. Сколько въ этомъ кускѣ квадратныхъ аршинъ, если ширина сукна 2 аршина?

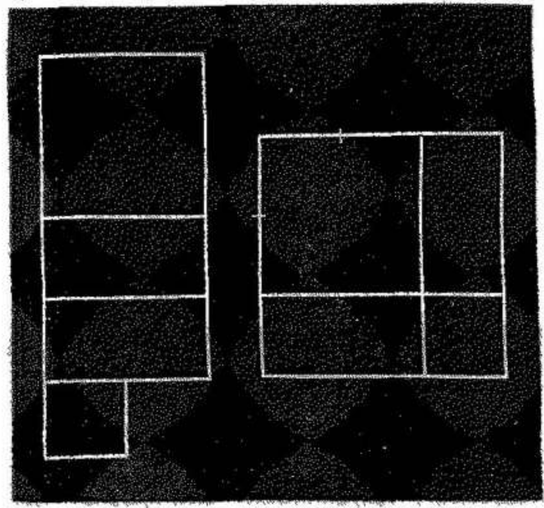
354) Полъ комнаты имѣетъ квадратную форму; длина его

3 сажени. Спрашивается сколько нужно кусковъ паркета въ квадратный аршинъ площадью для настилки этого пола?

355) У крестьянина есть лугъ треугольной формы; одна сторона луга въ 80 саж., другая 120 саж., а третья въ $^1/_4$ версты. Спрашивается сколько въ этомъ лугу квадратныхъ саженъ?

356) Вычертите квадратъ со сторонами въ $1^1/_2$ вершка и измѣрьте площадь его.

Эта и дальнѣйшія задачи подобнаго рода рѣшаются построеніемъ, а отнюдь не ариѳметическимъ вычисленіемъ, которымъ полезно провѣрять результаты построеній. Въ данномъ квадратѣ вычерчивается квадратный вершокъ, для чего



отъ одной изъ вершинъ, напр. лѣвой нижней, по сторонамъ откладывается по вершку и отъ полученныхъ точекъ проводятся перпендикуляры, которые продолжаются до встрѣчи со сторонами даннаго квадрата. Тогда данный квадратъ раздѣляется на четыре фигуры—два квадрата и два прямоугольника. Площадь большаго квадрата равна 1 кв. вершку; площадь малаго квадрата $= ^1/_4$ кв. вершка и. ч. онъ четыре раза помѣщается въ большомъ квадратѣ равномъ 1 квад. вершку; а каждый изъ остальныхъ прямоугольниковъ площадью равенъ $^1/_2$ кв. вершка и ч. помѣщается въ квадратѣ въ 1 кв. вер. ровно два раза. Стало быть площадь даннаго квадрата можетъ быть выражена суммой 1 кв. в. $+ \frac{1}{2}$ кв. в.

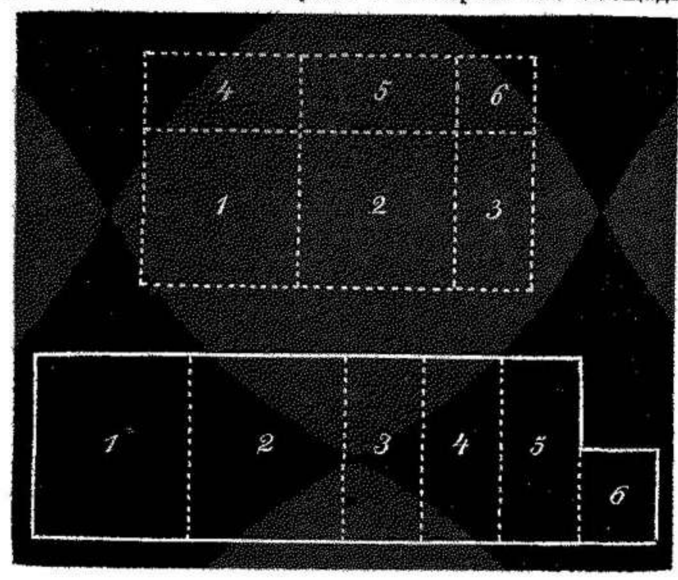
$+\frac{1}{2}$ кв. в. $+\frac{1}{4}$ кв. верш.—что составляетъ $2\frac{1}{4}$ кв. верш. Эта сумма выражается построенiемъ фигуры равномѣрной квадрату и наглядно показывающей его площадь. Взаключенiе задача повѣряется ариѳметическимъ вычисленiемъ $1\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{2} = 2\frac{1}{4}$.

357) Вычерчить прямоугольникъ съ основанiемъ въ $2^1/_2$ вершка и высотой $1^1/_2$ вер. и измѣрить площадь этого прямоугольника.

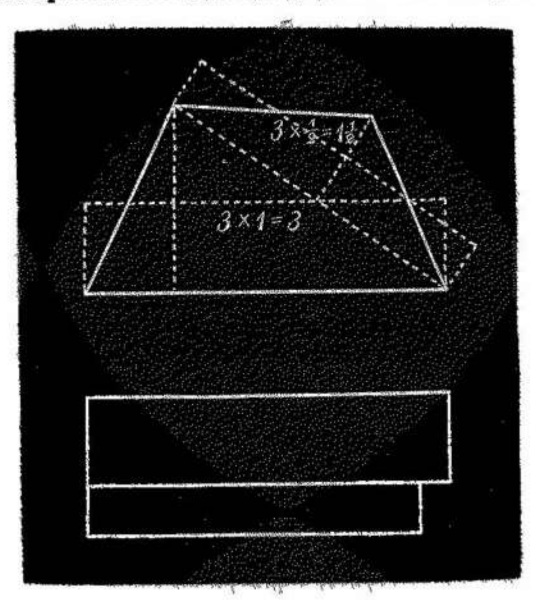
По основанiю и высотѣ откладывается 1 вершокъ столько разъ сколько возможно и черезъ полученныя такимъ образомъ точки проводятъ перпендикуляры къ основанiю и высотѣ до встрѣчи съ противуположными сторонами. Тогда данный прямоугольникъ расчерчивается на 6 фигуръ площади которыхъ легко опредѣлить. Площади 1-й и 2-й фигуры равны 1 кв. вершку; площади 3-й, 4-й и 5-й фигуръ равны $^1/_2$ кв. вершка и наконецъ площадь 6 фигуры$=^1/_4$ кв. вер. Сложивъ площади всѣхъ этихъ фигуръ получимъ искомую площадь въ $3^3/_4$ кв. вершка, которую и изобразимъ въ наглядно-выражающей равномѣрной фигуры.

358) Построить треугольникъ высотою въ $1^1/_4$ вершка, съ основанiемъ въ $3^1/_2$ вершка и измѣрить площадь его.

359) Построить четыреугольникъ высотою въ $1^1/_2$ вершка и съ основанiемъ въ 2 вершка и измѣрить его площадь.



Четыреугольникъ раздѣляется на два треугольника прямою соединяющею какія либо двѣ не рядомъ лежащія вершины и затѣмъ измѣряется площадь каждаго изъ нихъ. Сумма площа-



дей треугольниковъ будетъ площадью даннаго четыреугольника, которая наглядно выражается фигурою, равномѣрною данной.

360) Построить пятиугольникъ, четыреугольникъ и т. д. съ основаніемъ въ 1 верш. и высотою въ 2 вершка и опредѣлить площадь этой фигуры.

Данная фигура раздѣляется на треугольники, сумма площадей которыхъ и будетъ искомая площадь.

Фигуры должны быть задаваемы несложныя и притомъ такія, которыя дѣлились бы на треугольники, имѣющіе *высоту* и *основаніе*, въ которыхъ бы мѣра (вершокъ или дюймъ) содержалась цѣлое число разъ съ небольшими дробями $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_3$, и т. д.; если же въ результатѣ измѣренія высоты и основанія треугольника будутъ выходить очень мелкія дроби, то вычисленіе площади излишне затруднитъ учениковъ.

Въ дополненіе къ задачамъ, образцы которыхъ уже ука-

заны, слѣдуетъ задавать съемки плановъ: пруда, двора, поля и т. д. съ вычисленіемъ площади ихъ.

Далѣе даются задачи на построеніе фигуръ по данной площади, или по площади и высотѣ по площади и основанію. Опредѣленіе высоты или основанія того и другаго вмѣстѣ дѣлается опять таки—не вычисленіемъ, а построеніемъ.

Возможность выполненія такихъ задачъ ученики поймутъ очень легко и безъ наведенія преподователя. Но если бы встрѣтилась надобность въ уясненіи то, всего лучше сдѣлать его на какой либо задачѣ.

361) Построить прямоугольникъ высотою въ 2 вершка и площадью въ 6 кв. вершковъ.

Сколько кв. вершковъ помѣщается въ этой площади? Если бы мы уложили на нее 6 квадратиковъ по сторонамъ въ 1 в., рядами по высотѣ, то сколько уложилось бы въ одномъ ряду? Отчего? А сколько было бы рядовъ? Отчего вы это знаете? Нельзя ли поэтому судить какой длины будетъ основаніе фигуры?

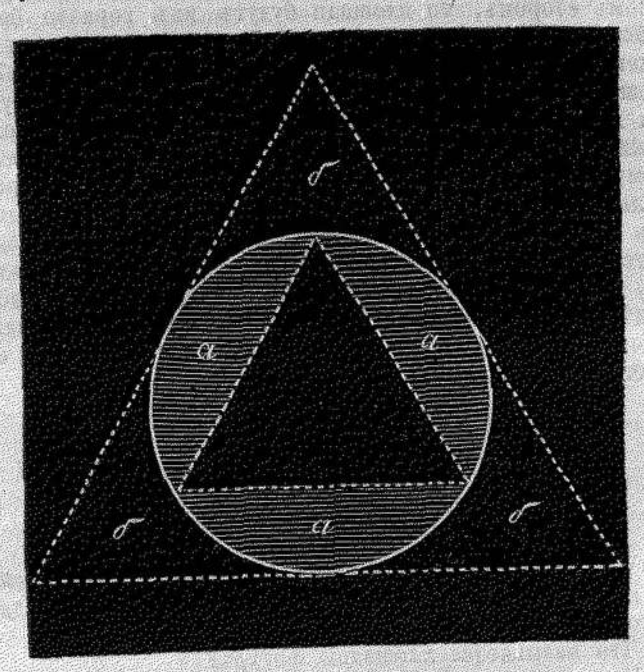
362) Построить треугольникъ съ основаніемъ въ 3 вершка и площадью въ 6 кв. вершковъ.

363) У крестьянина былъ дворъ прямоугольной формы длиною въ 5 сажень, и площадью въ 15 кв. сажень. Какъ велика была его ширина?

Въ заключеніе статьи о площадяхъ ученикамъ уясняется пріемъ приблизительнаго вычисленія площадей и криволинейныхъ фигуръ, при помощи вычисленія площадей вписанныхъ и описанныхъ прямолинейныхъ фигуръ. Для этого берется самая простая изъ криволинейныхъ фигуръ — кругъ. Ученики раздѣляютъ кругъ на три равныя части, получившіяся точки дѣленія попарно соединяютъ и получаютъ такимъ образомъ правильный треугольникъ вписанный въ кругъ; затѣмъ каждую треть окружности дѣлятъ пополамъ и черезъ средины проводятъ касательныя до взаимнаго схожденія; получается правильный треугольникъ описанный около круга.

Достаточно самаго поверхностнаго разсмотрѣнія вычерченныхъ фигуръ, чтобы убѣдиться въ томъ что площади ихъ *неравны*. Кромѣ того, не трудно видѣть и доказать что площадь вписаннаго треугольника наименьшая. До площади круга ей недостаетъ трехъ площадей a, a и a ограниченныхъ съ одной стороны—сторонами треугольника, а съ другой ду-

гами. Площадь круга въ свою очередь меньше площади наружнаго, *описаннаго* треугольника; ей недостаетъ до послѣдней трехъ площадей б, б, б—фигуръ, образующихся съ одной стороны дугами круга, а съ другой ломаною, состоящею изъ по-



ловинъ сторонъ большаго треугольника. Если сравнить одну изъ площадей а съ одною изъ площадей б, то оказывается, что большой разницы между ними нѣтъ, а потому безъ большой погрѣшности можно принять что кривая раздѣляетъ площадь между сторонами двухъ треугольниковъ пополамъ, такъ что а + а + а равняется б + б + б: чтобы получить а + а + а, т. е. сумму трехъ площадей, которую надо придать къ площади малаго треугольника, чтобы получить площадь круга—нужно вычислить площадь между обводами треугольниковъ и раздѣлить ее пополамъ. Площадь же эта получается, если изъ площади наружнаго треугольника (которую мы всегда можемъ вычислить) вычесть площадь внутренняго треугольника (которую также можемъ вычислить). По-

*

ловину полученной разности придаемъ къ площади малаго треугольника или отнимаемъ отъ площади большаго треугольника и въ результатѣ получаемъ *площадь круга*. Если впишемъ вмѣсто треугольниковъ многоугольники съ большимъ числомъ сторонъ, то площади будутъ ихъ гораздо больше приближаться къ площади круга, а потому и результатъ вычисленія будетъ вѣрнѣе. Если при вычисленіи не требуется большой точности и число сторонъ вписаннаго многоугольника достаточно велико, то можно не вычислять площади внѣшняго многоугольника, а площадь внутренняго принять за искомую площадь круга. Точно такимъ же пріемомъ приблизительно вычисляются площади неправильныхъ криволинейныхъ фигуръ. Такимъ образомъ выясненный пріемъ закрѣпляется и окончательно усвоивается на раздѣлываніи ряда задачъ, въ которыхъ дана фигура, вычерченная на доскѣ, опредѣленная извѣстными данными или же образованная на мѣстности берегами пруда, границами поля и т. д.—и опредѣляется площадь ея.

Вопросы для повторенія.

1) Что называется *основаніемъ* фигуры и что *высотою*?

2) Въ какихъ фигурахъ основаніе и высота совпадаютъ съ сторонами?

3) Что называется площадью фигуръ?

4) Если у двухъ равноплощадныхъ прямоугольниковъ высоты равны, то какъ велики ихъ основанія?

5) Если основаніе и высота одного изъ данныхъ прямоугольниковъ равны высотѣ и основанію другаго, то у котораго изъ нихъ площадь будетъ больше?

6) Если основаніе одного изъ прямоугольниковъ равныхъ площадей вдвое больше основанія другаго, то не будутъ ли равны ихъ высоты?

7) Если основаніе одного прямоугольника равно основанію другаго, а высота перваго въ 2-е, въ 3-е и т. д. больше высоты втораго, то у котораго изъ нихъ площадь будетъ больше, и во сколько разъ больше?

8) Если основаніе треугольника равно основанію равно-

мѣрнаго съ нимъ прямоугольника, то у какой изъ фигуръ высота будетъ больше, и во сколько разъ больше?

9) Если основаніе и высота треугольника равны основанію и высотѣ прямоугольника, то у которой изъ фигуръ площадь будетъ больше, и во сколько разъ больше?

10) Какъ вычертить фигуру равную суммѣ или разности площадей данныхъ фигуръ?

11) Какъ вычертить фигуру площадью вдвое, втрое, вчетверо и т. д. разъ большую или меньшую данной?

12) Какими мѣрами измѣряются площади?—Назовите нѣсколько квадратныхъ мѣръ.

13) Какъ измѣрить квадратными вершками площадь прямоугольника?

14) Какъ измѣряется площадь треугольника?

15) Какъ измѣряется площадь многоугольника?

16) Какъ опредѣлить высоту по даннымъ основанію и площади въ прямоугольникѣ, квадратѣ и треугольникѣ?

17) Какъ построить квадратъ вдвое большій даннаго квадрата?

18) Какъ построить квадратъ площадью равный суммѣ площадей двухъ данныхъ квадратовъ?

19) Какъ сдѣлать приблизительное вычисленіе площади круга и вообще криволинейной фигуры?

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

О плоскости и прямыхъ въ пространствѣ.

I.

Въ классъ приносятся предметы съ различнаго вида поверхностями, которые и раздаются ученикамъ. Изъ наблюденій, подъ вліяніемъ наводящихъ вопросовъ преподавателя дѣлаются слѣдующіе выводы:

Если мы возьмемъ какой либо предметъ наприм. камень, деревянный обрубокъ, металлическую плитку и т. д., то замѣтимъ, что у всякаго такого предмета есть *поверхность*,

которую мы видимъ разсматривая предметъ съ различныхъ сторонъ. Если разрѣжемъ или разломаемъ предметъ, то можемъ видѣть, кромѣ поверхности и *середку* (внутренность) т. е. то что находилось внутри его. Каждый изъ кусочковъ (частей предмета) будетъ имѣть свою поверхность, и если станемъ разсматривать его отдѣльно, то кромѣ этой поверхности ничего не увидимъ; еслибы мы пожелали видѣть внутренность кусочка, топришлось бы и его разломать или разбить.

Поверхности предметовъ мы видимъ на каждомъ шагу, разсматривая все окружающее насъ; гораздо рѣже намъ удается видѣть вмѣстѣ и внутренность предметовъ: это бываетъ только при разсматриваніи прозрачныхъ предметовъ какъ-то: куска янтаря, льду, стекла и т. д. Въ этомъ случаѣ внутренность предмета видна точно также хорошо какъ и поверхность ихъ. Всматриваясь въ поверхности предметовъ мы замѣчаемъ, что онѣ могутъ быть *сплошными* и *составными*, состоящими изъ частей.

Далѣе замѣчаемъ, что поверхности и части ихъ вообще *различны по виду*: одни изъ нихъ *ровныя*, *прямыя*, а другія *изогнутыя*, *кривыя*.

Первыя называются *плоскими поверхностями* или просто *плоскостями*, а вторыя *кривыми поверхностями*.

Нѣкоторые предметы имѣютъ поверхности угловатыя, составляющіяся изъ плоскостей соединенныхъ между собою и имѣющихъ различное направленіе. Такія поверхности называются *ломаными*, подобно тому какъ линіи составленныя изъ прямыхъ соединяющихся между собою и расположенныхъ въ различныхъ направленіяхъ называются ломаными линіями.

Поверхности соединяются, сходятся и пересѣкаются на *линіяхъ*: кривыхъ, ломаныхъ и прямыхъ.

Покажите нѣсколько поверхностей кривыхъ, плоскихъ и ломаныхъ на предметахъ въ классѣ.

Покажите линію схожденія или пересѣченія этихъ двухъ поверхностей.

На какой линіи пересѣкаются эти двѣ поверхности?

Покажите линію пересѣченія этихъ двухъ кривыхъ поверхностей и т. д.

Изъ сколькихъ частей состоитъ поверхность этого предмета?

Покажите мнѣ на какомъ либо предметѣ сплошную поверхность.

Покажите предметъ, у котораго поверхность была бы сплошною и плоскою.

Какія поверхности могутъ быть сплошными и какія составными?

II.

Если листъ бумаги, кусокъ кожи или полотна и т. п. предметовъ съ подвижными поверхностями туго натянемъ на рамку, то обѣ поверхности бумаги, кожи, полотна и т. д. (идущія по длинѣ и ширинѣ) примутъ видъ *плоскостей*, подобно тому какъ натанутая нитка принимаетъ видъ прямой линіи.

Мастеровые, которымъ приходится часто обдѣлывать предметы съ плоскими поверхностями очень легко, на глазъ, узнаютъ какая поверхность *плоская* и какая *кривая*. Но существуютъ пріемы, по которымъ легко отличить плоскость отъ кривой поверхности, если бы послѣдняя и очень мало отличалась отъ плоской поверхности. Эти пріемы легко узнаются если присмотрѣться къ особенностямъ плоской поверхности.

Приложите поверхность одного натянутаго листа бумаги къ другому натянутому же листу и наблюдайте что произойдетъ при этомъ приложеніи.

Двигайте одну изъ наложенныхъ плоскостей по другой и посмотрите—прилегаютъ ли плоскости и при этомъ повсемѣстно и безъ просвѣтовъ?

Приложите плоскость натянутаго листа къ кривой поверхности и посмотрите не прилегаетъ ли первая къ послѣдней повсемѣстно и безъ просвѣтовъ?

Приложите ломаную поверхность къ плоскости или ломаную поверхность къ кривой поверхности и посмотрите возможно ли повсемѣстное прилеганіе поверхностей?

Выводы:

Плоскости при наложеніи одна на другую повсемѣстно и безъ просвѣтовъ прилегаютъ другъ къ другу; кривыя же поверхности къ плоскостямъ ломанымъ или кривымъ поверхностямъ прилегаютъ лишь въ нѣсколькихъ точкахъ.

Приблизьте глазъ къ одному краю плоскости и смотрите на другой *).—Чѣмъ кажется при этомъ плоскость?

Посмотрите также на кривую или ломаную поверхности.—Чѣмъ кажутся вамъ эти поверхности?

Выводы:

Плоская поверхность кажется прямою линiею, если смотрѣть на нее съ одного края на другой противуположный; кривыя же и ломаныя поверхности не могутъ казаться прямою линiею, какъ бы мы не смотрѣли на нихъ.

Приложите прямое ребро линейки къ плоскости и наблюдайте какъ она прилегаетъ къ послѣдней. — Приложите его въ другомъ направленiи. — Двигайте приложенное ребро по плоскости и наблюдайте какъ оно прилегаетъ къ послѣдней.

Приложите прямое ребро линейки къ кривой и ломаной поверхности и наблюдайте какъ оно къ послѣднимъ прилегаетъ. Прилегаетъ ли оно по всей длинѣ, безъ просвѣтовъ?

Выводы:

Прямая линiя, будучи приложена къ плоскости, прилегаетъ къ ней безъ просвѣтовъ по всей длинѣ, что бываетъ при всевозможныхъ направленiяхъ прямой, а также и при движенiи ея по плоскости.

Изложенныя свойства плоскости могутъ послужить для отличенiя этой поверхности отъ всякой другой, какъ бы мало не различалась послѣдняя отъ первой.

Если нужно опредѣлить вѣрно ли произведена—выдѣлана данная плоскость то нужно:

1) Приложить къ ней какую либо извѣстную намъ, точно выдѣланную плоскость и посмотрѣть можетъ ли прилегать плотно, безъ просвѣтовъ, первая къ послѣдней на всемъ протяженiи; если прилегаетъ то это показываетъ что опредѣляемая поверхность *плоская*, въ противномъ случаѣ — кривая.

2) Посмотрѣть на опредѣляемую поверхность съ одного края на другой, противуположный; если она при этомъ кажется прямою линiею, то это показываетъ, что она плоская, въ противномъ случаѣ—что кривая и

3) Приложить прямое ребро линейки и вообще прямую къ

---

*) Преподаватель, не полагаясь на словесное объясненiе, показываетъ какъ надо смотрѣть.

опредѣляемой плоскости; если первое прилегаетъ къ послѣдней безъ просвѣтовъ на всемъ протяженіи и во всѣхъ возможныхъ направленіяхъ, то это признакъ того, что опредѣляемая поверхность плоская; въ противномъ случаѣ она — кривая.

При обдѣлываніи поверхностей въ плоскости мастеровые повѣряютъ себя не только на глазъ, но и при помощи изложенныхъ пріемовъ.

Укажите нѣсколько плоскостей на предметахъ въ классѣ и удостовѣрьтесь въ справедливости вашего глазомѣрнаго опредѣленія при помощи изложенныхъ пріемовъ.

Какая изъ поверхностей этого предмета плоская?

Сколько плоскихъ поверхностей можно указать на этомъ стулѣ, столѣ и т. д?

Для полнаго уясненія сообщеннаго понятія необходимо, чтобы каждый изъ учениковъ вытянулъ, обтесалъ или выпилилъ какую либо плоскость на кускѣ дерева или другаго какого матеріала.

Если ученики неимѣютъ необходимыхъ инструментовъ и умѣнія для вырѣзыванія плоской поверхности на деревѣ, камнѣ и т. д., то всего удобнѣе воспользоваться для нашей цѣли кучей песку, кускомъ глины, на которыхъ не трудно выдѣлывать всякаго рода поверхности.

Полезно также, если ученики цѣлымъ классомъ или небольшими партіями займутся планировкой аллеи, сада, участка двора или поля.

III.

Нельзя ли эту плоскость наставить, расширить или удлинить. Можно ли ее наставить кривою или ломаною поверхностью?

Установите плоскость, которая служила бы продолженіемъ вотъ этой плоскости. — Какъ надо установить новую плоскость?—Ф и К сдѣлайте что сказано.

Нельзя ли эту плоскость продолжить въ другомъ направленіи?

Нельзя ли продолжить ее еще въ этомъ же направленіи?

Выводы:

Плоскость можетъ быть продолжена (наставлена) во всѣхъ возможныхъ направленіяхъ какъ угодно далеко.

Если желаемъ установить плоскость служащую продолженіемъ данной нужно ее направить такъ, чтобы она казалась сливающеюся вмѣстѣ съ первою въ одну прямую линію, если посмотрѣть съ одного края первой на край противуположный или же такъ чтобы ребро линейки плотно, безъ просвѣтовъ прилегало къ обѣимъ плоскостямъ.

Задачи:

364) Установить какую либо плоскость (плоскость деревянной доски, натянутаго листа бумаги или кисеи и т. д.) и обозначить на ней одну, двѣ, три и болѣе точекъ, прямыхъ и кривыхъ линій.

Посмотрите на плоскость съ одного края на другой противуположный и замѣтьте какъ рисуются, какъ кажутся проведенныя прямыя, кривыя и ломаныя при совмѣщеніи плоскости въ прямую?

365) Установить двѣ и болѣе части плоскости такъ, чтобы онѣ находились въ одной плоскости.

IV.

До сихъ поръ мы строили линіи, углы и фигуры въ плоскости доски, листа бумаги и т. д. Теперь мы будемъ дѣлать построенія, въ которыхъ точки, линіи и фигуры будутъ устанавливаться въ пространствѣ *).

---

*) По поводу слова пространство нѣтъ ни малѣйшей надобности вдаваться преподавателю въ какія либо опредѣленія и въ особенности длинныя объясненія. Это понятіе образовавшееся въ ребенкѣ гораздо раньше чѣмъ онъ попадаетъ въ школу и именно по этому процесъ индуктивнаго образованія его улетучивается, а потому и не можетъ служить для выработки опредѣленія, въ которомъ при томъ нѣтъ никакой необходимости на практикѣ. Ученики легко освоиваются съ этимъ понятіемъ на исполненіи задачъ, при помощи наводящихъ вопросовъ и указаній учителя.

Задачи:

366) Установить въ пространствѣ точку (остріе спички воткнутой въ пробку) и черезъ нее проведите нѣсколько прямыхъ, кривыхъ или ломаныхъ линій.

367) Установить прямую, проходящую черезъ точку и двигать её не отымая отъ точки.

368) Черезъ двѣ точки въ пространствѣ провести нѣсколько прямыхъ, ломаныхъ и кривыхъ.

369) Установить прямую, проходящую черезъ двѣ точки и измѣнять ея положеніе.

370) Черезъ три и болѣе точекъ провести нѣсколько прямыхъ, ломаныхъ и кривыхъ въ пространствѣ.

371) Установить въ пространствѣ нѣсколько точекъ въ прямомъ направленіи.

372) Обозначить прямую въ пространствѣ нѣсколькими точками.

373) Обозначить продолженія прямой въ пространствѣ рядами точекъ.

374) Установить двѣ прямыя въ пространствѣ, изъ которыхъ первая была бы больше второй.

375) Обозначить двумя точками прямую равную суммѣ двухъ данныхъ прямыхъ.

376) Установить прямую равную разности разстояній между данными двумя парами точекъ.

377) Обозначить рядомъ точекъ прямую въ нѣсколько разъ большую данной.

378) Раздѣлить прямую на равныя и неравныя части.

379) Построить прямую въ нѣсколько разъ меньшую данной.

380) Опредѣлить во сколько разъ разстояніе между двумя данными точками меньше данной же прямой.

381) Измѣрить разстояніе между двумя данными точками въ пространствѣ.

На этихъ задачахъ повторяются и дополняются выводы сдѣланные въ 1-й части въ статьѣ о прямой.

382) Построить двѣ пересѣкающіяся прямыя въ пространствѣ.

383) Установить прямую, на ней взять точку и черезъ нее провести прямую пересѣкающую первую.

384) Установить точку внѣ прямой и изъ нея провести къ послѣдней прямую пересѣкающую.

385) Черезъ двѣ и болѣе точекъ провести прямую пересѣкающую данную прямую въ пространствѣ.

385) Установить двѣ и болѣе точекъ, черезъ которыя проходила бы прямая пересѣкающая данную прямую въ пространствѣ.

386) Установить двѣ прямыя въ пространствѣ, не пересѣкающіяся.

387) Установить двѣ прямыя въ пространствѣ, которыя по продолженіи, могли бы встрѣтиться.

388) Установить два ряда точекъ, обозначающихъ прямыя могущія встрѣтиться по продолженіи и затѣмъ обозначить точку пересѣченія.

389) Установить нѣсколько прямыхъ пересѣкающихся одна съ другою и образующихъ ломаную.

V.

Задачи:

390) Установить точку (остріе проволоки или спички) и затѣмъ одну, двѣ, три и болѣе плоскости, которыя бы проходили черезъ эту точку.

391) Установить точку и проходящую черезъ нее плоскость и затѣмъ измѣнять положеніе послѣдней (плоскости) не отнимая ее отъ первой (отъ точки).

392) Установить двѣ точки и затѣмъ одну, двѣ, три и болѣе плоскостей проходящихъ черезъ нихъ.

393) Установить двѣ точки и черезъ нихъ проходящую плоскость и измѣнять положеніе послѣдней, неотымая ее отъ обѣихъ точекъ.

394) Установить прямую линію и черезъ нее проходящія одну, двѣ, три и болѣе плоскостей.

395) Установить прямую и черезъ нее проходящую плоскость и измѣнять положеніе послѣдней, не отымая ее отъ первой.

396) Установить три точки не лежащія въ прямой линіи и затѣмъ нѣсколько плоскостей черезъ нихъ проходящихъ. Возможно ли черезъ три точки провести плоскость? — Какъ это сдѣлать?

397) Установить плоскость проходящую через три точки и измѣнять положеніе первой, неотымая отъ послѣднихъ.

398) Установить нѣсколько плоскостей проходящихъ черезъ двѣ пересѣкающіяся прямыя.

399) Установить плоскость, проходящую черезъ двѣ пересѣкающіяся прямыя и двигать ее не отымая отъ прямыхъ.

400) Установить двѣ не пересѣкающіяся прямыя и затѣмъ плоскость проходящую черезъ нихъ.

401) Установить 4 и болѣе точекъ, три и болѣе пересѣкающіяся прямыя, двѣ и болѣе непересѣкающихся прямыхъ въ одной плоскости.

402) Установить кривую и ломаную въ одной плоскости.

При рѣшеніи этихъ задачъ употребляются: а) Заостренныя проволоки различной длины воткнутыя въ пробку приклеенную къ дощечкѣ; острія этихъ проволокъ изображаютъ точки. Большая или меньшая длина проволоки, а также положеніе дощечки обусловливаетъ положеніе точки б) Нитки, тонкія проволоки и ребра деревянныхъ брусковъ и дощечекъ, которыя представляютъ линіи; в) Плоскости на деревянныхъ доскахъ, на кускахъ папки, на вытянутыхъ и наклеенныхъна рамкѣ листахъ бумаги и кускахъ кисеи.

Необходимо, чтобы каждый изъ учениковъ класса дѣлалъ своими руками какъ можно больше изъ предложенныхъ задачъ, потому что наблюденія на самомъ раздѣлываніи подобныхъ задачъ наиболѣе важны для нашей цѣли. Ученики неучаствующіе въ построеніи должны сидѣть какъ можно ближе къ моделямъ. По этому желательно, чтобы число приборовъ моделей было какъ можно большее и чтобы такимъ образомъ построеніе дѣлалось въ возможно большемъ числѣ мѣстъ въ классѣ. Всего лучше раздѣлять учениковъ на группы въ четыре—пять человѣкъ и давать для каждой изъ нихъ необходимыя для построенія модели.

Выводы:

На плоскости можно поставить сколько угодно точекъ и провести сколько угодно прямыхъ, кривыхъ и ломаныхъ линій, которыя—всѣ будутъ находиться въ этой плоскости и вмѣстѣ съ нею сливаются въ прямую, если смотрѣть съ одного края плоскости на другой—противуположный.

Черезъ одну точку можно провести сколько угодно плоскостей.

Плоскость проходящая черезъ одну данную точку можетъ измѣнять положеніе, несходя съ точки.

Черезъ двѣ точки, а также черезъ прямую линію можно провести сколько угодно плоскостей.

Точка, двѣ точки и одна прямая могутъ находиться одновременно на многихъ плоскостяхъ.

Плоскость проходящая черезъ двѣ точки или черезъ прямую можетъ измѣнять положеніе не сходя съ точекъ или съ прямой.

Черезъ три точки, черезъ точку и прямую, а также черезъ двѣ сходящіяся или пересѣкающіяся прямыя можно провести только одну плоскость.

Если прямыя и точки установлены такъ что черезъ нихъ можно провести только одну плоскость, то говорятъ что онѣ находятся въ одной плоскости; если онѣ расположены такъ, что черезъ нихъ нельзя провести плоскости, то говорятъ что онѣ находятся въ разныхъ плоскостяхъ.

Плоскость проходящая черезъ три точки или черезъ точку и прямую, или же черезъ двѣ сходящіяся или пересѣкающіяся прямыя не можетъ измѣнять своего положенія, не сходя съ данныхъ точекъ и прямыхъ.

Черезъ четыре и болѣе точекъ не лежащихъ на одной прямой, а также черезъ двѣ и болѣе не пересѣкающихся прямыхъ и черезъ три и болѣе пересѣкающихся, черезъ кривую и ломаную—вообще нельзя провести плоскость; но можно установить сколько угодно точекъ прямыхъ, кривыхъ и ломаныхъ, черезъ которыя пройдетъ плоскость, т. е. находящихся въ одной плоскости.

VI.

Подобно тому какъ прямыя линіи обозначались рядомъ точекъ, плоскости могутъ быть обозначены рядомъ прямыхъ (не менѣе двухъ), построенныхъ въ одной плоскости, а также группой точекъ (не менѣе трехъ), черезъ которыя могла бы проходить плоскость. Черезъ такой рядъ прямыхъ и группу точекъ можетъ проходить только одна плоскость, а потому

положеніе ея опредѣлено, его нельзя смѣшать съ положеніемъ другихъ плоскостей.

Когда землекопы, насыпая какую нибудь насыпь желаютъ выдѣлать поверхности на ней плоскими, то сначала устанавливаютъ нѣсколько прямыхъ (прямыхъ реекъ или вытянутыхъ веревокъ), которыя бы находились въ одной плоскости и обозначали бы собою плоскость, а затѣмъ уже дѣлаютъ насыпку сравнивая ее подъ одну плоскость съ установленными точками или прямыми. Тоже дѣлаютъ и каменьщики когда поверхности большихъ неправильной формы глыбъ имъ приходится обтесывать въ плоскости. Они вытесываютъ два сходящихся желобка на камнѣ, ребро сторонъ у которыхъ было бы прямою линіей и затѣмъ стесывая поверхность постоянно смотрятъ съ одной прямой на другую. Когда обѣ прямыя сливаются съ поверхностью въ одну прямую линію, то это показываетъ, что поверхность отесана плоскостью.

403) Обозначить плоскость рядомъ прямыхъ.

404) Установить плоскость и продолженія ея обозначить рядомъ прямыхъ пересѣкающихся въ точкѣ, взятой на плоскости.

405) Установить въ пространствѣ двѣ пересѣкающіяся прямыя и затѣмъ плоскость, которая служила бы продолженіемъ плоскости обозначенной прямыми.

406) Обозначить плоскость нѣсколькими точками.

VII.

Стороны и вершина угла образуемаго въ пространствѣ двумя прямыми всегда находятся въ одной плоскости потому что черезъ двѣ пересѣкающіяся прямыя всегда можно провести плоскость и притомъ только одну.

О величинѣ угла, т. е. раствореніи сторонъ можно судить по ширинѣ части плоскости заключенной между сторонами. Чѣмъ шире эта заостренная полоса тѣмъ больше уголъ и на оборотъ. Линейные углы иногда называются плоскими потому что они расположены въ плоскости и измѣряются въ плоскости. (Вспоминаются пріемы измѣренія угловъ).

Задачи:

407) Установить въ пространствѣ два угла, изъ которыхъ одинъ былъ бы больше другаго.

408) Сравнить по величинѣ два данные угла въ пространствѣ.

409) Построить уголъ равный данному углу въ пространствѣ.

410) Построить уголъ въ пространствѣ равный суммѣ двухъ или нѣсколькихъ данныхъ угловъ.

411) Обозначить тремя точками уголъ равный разности двухъ данныхъ угловъ.

412) Построить уголъ въ пространствѣ въ нѣсколько разъ большій даннаго угла.

413) Раздѣлить уголъ, данный въ пространствѣ, на равныя части.

414) Построить уголъ въ пространствѣ въ нѣсколько разъ меньшій даннаго угла.

415) Опредѣлить—во сколько разъ одинъ изъ данныхъ угловъ больше или меньше другаго.

Выводы:

Построенія угловъ въ пространствѣ, отвѣчающія вышеизложеннымъ задачамъ отличаются отъ построеній, которыя дѣлались раньше тѣмъ, что здѣсь необходимо наблюдать, чтобы всѣ прямыя, составляющія стороны различныхъ угловъ устанавливались въ одной плоскости, тогда какъ прежде—когда дѣлали построенія на плоскости — это выходило само собою.

VIII.

416) Изъ точки данной на прямой возставить перпендикуляръ.

Нельзя ли возставить изъ этой точки еще одного перпендикуляра?

417) Изъ точки данной на прямой возставить къ ней нѣсколько перпендикуляровъ.

Сколько перпендикуляровъ можно возставить къ прямой изъ точки, взятой на ней, если это построеніе производить въ одной плоскости?—А въ пространствѣ?

418)На прямой взять точку и отъ нея провести нѣсколько наклонныхъ подъ угломъ 45°.

Сколько такихъ наклонныхъ можно провести, если дѣлать построеніе въ одной плоскости (двѣ).—А въ пространствѣ? (множество).

Посмотрите, нельзя-ли провести черезъ нѣсколько перпендикуляровъ къ прямой—плоскости?—А черезъ нѣсколько наклонныхъ подъ однимъ и тѣмъ-же угломъ?

419) Внѣ прямой поставить точку и опустить на первую нѣсколько перпендикуляровъ.

420 Изъ точки взятой внѣ прямой въ пространствѣ провести къ ней наклонную подъ угломъ въ 60°.

Выводы:

Изъ точки на прямой въ пространствѣ можно провести множество перпендикуляровъ, которые всѣ будутъ въ одной плоскости.

Изъ точки на прямой въ пространствѣ можно провести множество наклонныхъ подъ однимъ и тѣмъ же угломъ, которыя не будутъ въ одной плоскости.

Изъ точки внѣ прямой въ пространствѣ можно провести къ ней только одинъ перпендикуляръ и двѣ наклонныхъ подъ опредѣленнымъ угломъ.

421) Установить точку въ пространствѣ и затѣмъ установить 4, 5 и болѣе точекъ равно удаленныхъ отъ прежде поставленной.

422)Установить прямую и затѣмъ нѣсколько точекъ равно удаленныхъ отъ нея.

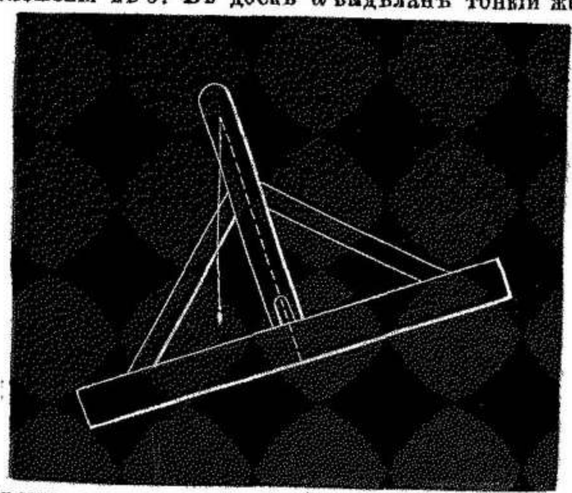
423)Установить точку и затѣмъ нѣсколько прямыхъ равно удаленныхъ отъ нея.

424) Установить уголъ,стороны котораго были-бы перпендикулярны къ данной прямой.

425) Установите отвѣсную прямую въ пространствѣ и затѣмъ нѣсколько горизонтальныхъ,проходящихъ черезъ точку, взятую на первой.Какіе углы составляются отвѣсною съ горизонтальной? Сколько горизонтальныхъ можно построить, если производить построеніе на плоскости?—А въ пространствѣ?

Отвѣсныя прямыя устанавливаются при помощи отвѣса (см. выше), а для установленія горизонтальныхъ прямыхъ существуетъ особый приборъ очень простаго устройства, употребляемый плотниками при установкѣ досокъ и брусьевъ

въ горизонтальномъ положенiи. Этотъ приборъ называется *ватерпасомъ*. Онъ состоитъ изъ двухъ досокъ *а* и *б* скрѣпленныхъ между собою подъ прямымъ угломъ; *в* и *г* распорки препятствующiя доскѣ *а* уклоняться отъ перпендикулярнаго положенiя къ *б*. Въ доскѣ *а* выдѣланъ тонкiй желобокъ,



по которому ложится нить отвѣса; этотъ желобокъ представляетъ прямую перпендикулярную къ верхнему и нижнему ребрамъ доски *б*. Въ доскѣ же *а* продѣлано отверзтiе, въ которомъ свободно виситъ гирька отвѣса. Если нить отвѣса спокойно установилась по направленiю желобка—это значитъ, что послѣднiй принялъ отвѣсное положенiе, значитъ нижнее ребро доски приняло горизонтальное положенiе.

Если нужно установить доску въ горизонтальномъ положенiи, то на нее кладутъ нижнее ребро доски *б* ватерпаса и, подымая или опуская одинъ изъ концевъ доски, приводятъ ее въ горизонтальное положенiе, что обнаружится когда нить отвѣса прилегаетъ къ желобку.

IX.

426) Проведите на доскѣ прямую и поставьте двѣ точки равно удаленныя отъ первой.

Какая прямая пройдетъ черезъ эти точки? Какую прямую мы называли параллельною?—Всѣ ли точки прямой, опредѣляющейся

поставленными точками будутъ равно удалены отъ первой прямой?

427) Установите въ пространствѣ прямую и затѣмъ двѣ точки равно удаленныя отъ нея.

Всегда ли прямая, проходящая черезъ эти точки будетъ параллельною данной? — Установите точки такъ, чтобы онѣ не находились съ прямою въ одной плоскости; черезъ нихъ проведите прямую и измѣрьте разстоянія различныхъ точекъ взятыхъ на этой послѣдней отъ данной прямой.

Такъ, какъ же надо откладывать разстоянія для назначенія точекъ, опредѣляющихъ положеніе параллельной къ данной? (По перпендикулярамъ, построеннымъ въ одной плоскости съ данною прямою).

428) Построить двѣ параллельныя прямыя въ пространствѣ, при помощи угловъ, которые они составляютъ съ сѣкущею (см. стр. 79).

Какъ вы будете строить углы? Если стороны соотвѣтственныхъ угловъ будутъ не въ одной плоскостя, то могутъ ли быть прямыя параллельными? — А самыя параллельныя, могутъ ли быть не въ одной плоскости?

— Попытайтесь провести двѣ параллельныя (равноотстоящія), которыя были бы не въ одной плоскости.

429) Построить двѣ непараллельныя на классной доскѣ.

Что произойдетъ если мы продолжимъ эти прямыя въ обѣ стороны?

430) Построить въ пространствѣ двѣ непараллельныя прямыя. Находятся ли эти прямыя въ одной плоскости? — Можно ихъ построить такъ, чтобы онѣ находились не въ одной плоскости? — Пересѣкаются ли онѣ, если будутъ въ разныхъ плоскостяхъ? — Какая разница между не параллельными на плоскости и не параллельными въ пространствѣ.

Выводы:

Параллельныя въ пространствѣ всегда находятся въ одной плоскости. При построеніи параллельныхъ, разстоянія для точекъ равно отстоящихъ отъ одной изъ прямой откладываются по перпендикулярамъ, проведеннымъ въ одной плоскости.

При построеніи параллельной, при помощи соотвѣтственныхъ угловъ, образуемыхъ этими прямыми съ сѣкущею, углы строятся въ одной плоскости.

Непараллельныя прямыя въ пространствѣ встрѣчаются толь-

ко тогда, если онѣ проведены въ одной плоскости; въ противномъ случаѣ онѣ не встрѣчаются.

431) Черезъ данную точку внѣ прямой въ пространствѣ провести къ послѣдней параллельную.

432) Установить двѣ непараллельныя и непересѣкающіяся прямыя и затѣмъ провести параллельную къ одной изъ нихъ такъ, чтобы она пересѣкла и другую.

433) Провести двѣ непараллельныя и непересѣкающіяся прямыя и на одной изъ нихъ назначить двѣ точки равно удаленныя отъ другой.

434) Опредѣлить кратчайшее разстояніе между двумя непараллельными и непересѣкающимися прямыми.

435) Черезъ точку, взятую на одной изъ непараллельныхъ и непересѣкающихся прямыхъ провести прямую, которая пересѣкала бы другую.

436) Провести нѣсколько прямыхъ параллельныхъ и одинаково отстоящихъ отъ данной прямой.

437) На данной плоскости провести прямую параллельную данной, внѣ плоскости, прямой.

438) На плоскости провести нѣсколько прямыхъ параллельныхъ данной.

439) На плоскости провести прямую непараллельную и непересѣкающуюся съ данной.

440) Установить прямую непараллельную прямой, проведенной на плоскости и пересѣкающуюся съ ней.

X.

Прямолинейныя и криволинейныя фигуры, которыя мы досихъ поръ разсматривали, строились въ одной плоскости. Но можно ихъ строить и въ пространствѣ.

Изъ всѣхъ извѣстныхъ намъ фигуръ только треугольникъ всегда выходитъ въ одной плоскости; четыреугольники же, пятиугольники и вообще многоугольники, а также и криволинейныя фигуры могутъ быть построены не въ одной плоскости. Это обнаруживается для учениковъ на построеніи различнаго вида фигуръ въ пространствѣ.

Все что было говорено о равенствѣ и подобіи относится только до фигуръ, которыя расположены въ одной плоскости (для треугольниковъ, построенныхъ какъ угодно п. ч. они всегда выходятъ въ одной плоскости).

441) Построить четыреугольникъ, стороны котораго были бы не въ одной плоскости.

442) Построить кроволинейную фигуру, расположенную не въ одной плоскости, но у которой нѣкоторыя (произвольно взятыя) точки обвода были бы равно удалены отъ какой нибудь данной точки.

Будетъ ли эта фигура кругомъ? — Совмѣщаются ли части кривой обвода по наложеніи одна на другую? — Можно провести здѣсь діаметръ?

443) Построить нѣсколько прямолинейныхъ и криволинейныхъ фигуръ въ одной плоскости.

444) Построить треугольникъ, стороны котораго были бы параллельны сторонамъ треугольника, построеннаго на плоскости.

445) Построить ломаную, части которой были-бы параллельны частямъ ломаной, вычерченной на плоскости.

XI.

Если на плоскости поставить точку и отъ нея провести прямую, не лежащую въ этой плоскости, то послѣдняя, по продолженіи ея въ обѣ стороны, пересѣчетъ плоскость—перейдетъ на другую сторону ея. Такая прямая называется *пересѣкающею* плоскость.

446) Провести прямую пересѣкающую данную плоскость и имѣющую съ послѣднею двѣ общія точки.

Можетъ ли быть пересѣкающею прямая, имѣющая съ плоскостью двѣ общія точки?—А какое положеніе будетъ имѣть такая прямая? — Почему она будетъ въ данной плоскости? (доказательство, опирающееся на той истинѣ, что между двумя точками можно провести только одну прямую).

Выводы:

Прямая пересѣкающая плоскость имѣетъ съ послѣднею только одну общую точку.

447) На плоскости поставить точку и установить нѣсколько прямыхъ ее пересѣкающихъ.

448) Установить нѣсколько кривыхъ и ломаныхъ пересѣкающихъ данную плоскость и проходящихъ черезъ назначенную на послѣдней точку.

449) Установить внѣ плоскости точку и черезъ нее провести нѣсколько прямыхъ пересѣкающихъ плоскость.

450) Внѣ плоскости установить двѣ точки и черезъ нихъ провести нѣсколько прямыхъ пересѣкающихъ плоскость.

Можно ли черезъ эти двѣ точки провести нѣсколько прямыхъ пересѣкающихъ плоскость? Почему нельзя? (двѣ точки опредѣляютъ положеніе прямой).

451) Установите прямую пересѣкающую плоскость и проведите черезъ точку пересѣченія ея—перпендикулярную къ пересѣкающей.

Можно ли это сдѣлать?—Вотъ я установилъ въ плоскости прямую, проходящую черезъ основаніе пересѣкающей. — Смотрите, равные ли углы образовались ею съ пересѣкающею? Который изъ нихъ вышелъ больше? Теперь я буду измѣнять положеніе прямой, установленной въ плоскости не отнимая ее отъ точки пересѣченія. Наблюдайте—что при этомъ происходитъ?—Какой уголъ увеличивается и какой уменьшается?— Могу ли я двигать прямую такъ, чтобы разница между углами, образуемыми ею съ пересѣкающею уменьшалась? — Значитъ, можно ли установить прямую такъ, чтобы она была перпендикулярна къ пересѣкающей? — А сколько прямыхъ перпендикулярныхъ къ пересѣкающей можно провести черезъ точку пересѣченія?

452) Установить прямую параллельную пересѣкающей данную плоскость.

453) Установить пересѣкающую перпендикулярную къ прямой на плоскости.

454) Установить нѣсколько пересѣкающихъ и перпендикулярныхъ къ прямой на плоскости и проходящихъ черезъ точку взятую на прямой.

455) Установить двѣ пересѣкающія плоскость, образующія между собою прямой уголъ.

456) Установить три прямыя пересѣкающія данную плоскость, не параллеиныя и не встрѣчающіяся.

Выводы:

Черезъ данную точку на плоскости можно провести сколько угодно прямыхъ пересѣкающихъ плоскость.

Черезъ точку внѣ плоскости можно провести сколько угодно прямыхъ пересѣкающихъ плоскость.

Черезъ двѣ точки внѣ плоскости можно провести только одну прямую пересѣкающую плоскость.

Три, четыре и болѣе точекъ всегда можно установить такъ, что черезъ нихъ пройдетъ прямая пересѣкающая плоскость.

Черезъ точку пересѣченія всегда можно провести прямую на плоскости перпендикулярную къ пересѣкающей и при томъ только одну.

457) Отъ точки пересѣченія, провести на плоскости нѣсколько прямыхъ и измѣрить углы, составляемые ими съ пересѣкающею.

Равны ли эти углы?

Если прямую проволоку, установленную въ плоскости, конецъ которой находится въ точкѣ пересѣченія мы будемъ двигать, не отымая отъ плоскости, то не будутъ ли измѣняться углы образуемые съ пересѣкающею?—Нельзя ли двигать эту прямую такъ, чтобы уголъ уменьшался?—Если двигать прямую, не выводя ее изъ плоскости и неотымая отъ точки пересѣченія все въ одну сторону, то всегда ли уголъ уменьшается—не прекращается ли гдѣ либо это уменьшеніе? Замѣтьте то положеніе прямой, до котораго уголъ уменьшается, и, послѣ котораго онъ начинаетъ увеличиваться. При этомъ положеніи уголъ оказывается наименьшій изъ всѣхъ, которые образуются прямою при различныхъ положеніяхъ ея.

458) Установить нѣсколько пересѣкающихъ данную плоскость прямыхъ и измѣрить для каждой изъ нихъ наименьшій уголъ, который можетъ образовать съ пересѣкающей прямая проведенная отъ точки пересѣченія.

Если прямую на плоскости *составлявшую* съ пересѣкающими наименьшій уголъ мы будемъ продолжать двигать въ какомъ либо направленіи, невыводя ее изъ плоскости и не отымая отъ точки пересѣченія, то уголъ будетъ увеличиваться до извѣстнаго предѣла, далѣе котораго онъ снова станетъ уменьшаться.

459) Установить прямую въ данной плоскости, выходящую изъ точки пересѣченія въ положеніи, при которомъ она образуетъ съ пересѣкающею наибольшій уголъ и затѣмъ измѣрить этотъ уголъ.

Установите прямую въ плоскости, образующую съ пересѣкающею наименьшій уголъ и затѣмъ другую прямую въ плоскости же, которая образуетъ съ нею наибольшій уголъ и присмотритесь какъ расположены эти обѣ прямыя (онѣ образуютъ одну прямую линію).

А нельзя ли, установивъ прямую, образующую наименьшій уголъ—по ней провести прямую образующую наибольшій уголъ? — Какъ это сдѣлать? (прямую, образующую наименьшій уголъ продолжить).

460) Установите прямую на плоскости, которая образовала бы съ пересѣкающею наименьшій и наибольшій углы; черезъ точку пересѣченія на плоскости проведите прямую перпендикулярную къ пересѣкающей и затѣмъ сравните углы образуемые этимъ перпендикуляромъ съ другою (наклонною стороною наименьшаго угла).

461) Установите другую пересѣкающую;проведите на плоскость прямую, образующую съ первою наименьшій и наибольшій уголъ; проведите черезъ точку пересѣченія на плоскости прямую перпендикулярную къ пересѣкающей такъ, чтобы эта прямая не была перпендикулярна къ другой сторонѣ наименьшаго угла.

Можно ли это сдѣлать?— Значитъ, обѣ стороны наименьшаго угла всегда перпендикулярны къ прямой, образующей съ пересѣкающей прямые углы?

А нельзя ли опредѣлить плоскость, въ которой находится наименьшій уголъ? (въ плоскости перпендикулярной къ перпендикуляру къ пересѣкающей).

Нельзя ли этимъ воспользоваться для того, чтобы установлять, не ощупью, прямую образующую съ пересѣкающею наименьшій уголъ?

(Можно; для этого нужно провести перпендикуляръ къ пересѣкающей и къ нему отъ точки пересѣченія провести на плоскости прямую, перпендикулярную. Уголъ образуемый послѣднею съ пересѣкающею и будетъ наименьшій).

Разсматривая положенія различныхъ пересѣкающихъ относительно плоскости мы замѣчаемъ, что однѣ изъ нихъ стоятъ прямо по отношенію къ плоскости — не наклоняются ни въ одну изъ сторонъ ея, а другія наклонены къ какой нибудь сторонѣ плоскости. Степень наклоненія прямой къ плоскости опредѣляется угломъ, составляемымъ прямою съ плоскостью— угломъ который называется *линейно-плоскостнымъ угломъ*.

Этого рода углы, опредѣляющіе наклоненіе прямой къ плоскости можно измѣрить линейнымъ угломъ. Но какой изъ линейныхъ угловъ, составляемыхъ пересѣкающею съ прямыми на плоскости можетъ выразить степень наклоненія прямой къ плоскости? — Можетъ ли служить для этой цѣли всякій уголъ, составляемый прямою на плоскости съ пересѣкающею? Отъ чего не можетъ? — А какой же уголъ нужно взять въ данномъ случаѣ? (Наименьшій, потому что онъ только одинъ для каждой наклонной).

462) Установите нѣсколько прямыхъ, пересѣкающихъ данную плоскость и опредѣлите углы наклоненія ихъ къ плоскости.

463)Установите пересѣкающую подъ угломъ въ 20°, 35°, 45°, 62°, и т. д.

Выводы

Отъ точки пересѣченія, на плоскости можно провести нѣсколько прямыхъ, которыя образуютъ съ пересѣкающею различные углы; но между ними можетъ быть проведена прямая, образующая съ пересѣкающею наименьшій уголъ. Продолженіе послѣдней прямой образуетъ съ пересѣкающею наибольшій уголъ.

Стороны наименьшаго и наибольшаго угловъ перпендикулярны къ прямой на плоскости, образующей съ пересѣкающею прямые углы и находятся въ плоскости перпендикулярной къ прямой образующей съ пересѣкающею прямые углы.

Наименьшимъ изъ угловъ, образуемыхъ прямыми на плоскости, выходящими изъ точки пересѣченія съ пересѣкающею опредѣляется наклонъ пересѣкающей къ плоскости.

Если пересѣкающую прямую будемъ двигать въ плоскости наименьшаго угла, не сдвигая съ данной точки пересѣченія, то наименьшій и наибольшій углы будутъ измѣняться: одинъ изъ нихъ будетъ уменьшаться, въ то время какъ другой будетъ увеличиваться. Можно измѣнять положеніе пересѣкающей такъ, что наименьшій уголъ будетъ увеличиваться, а наибольшій уменьшаться, такъ что разница между ними будетъ уменьшаться. Стало быть, продолжая указанное движеніе мы поставимъ пересѣкающую въ такое положеніе, при которомъ наибольшій и наименьшій углы сравняются и будутъ оба прямыми.

464) Установить пересѣкающую подъ прямымъ угломъ наклоненія къ плоскости.

Измѣрить наибольшій изъ угловъ, образуемыхъ этою пересѣкающею съ прямыми проведенными на плоскости и выходящими изъ точки пересѣченія.—Какими оказываются эти углы?—Всѣ ли они прямые? — Можно ли провести на плоскости черезъ точку пересѣченія прямую, которая составляла бы съ пересѣкающею не прямые углы?

Прямая, пересѣкающая плоскость и перпендикулярная ко всѣмъ прямымъ проведеннымъ на плоскости черезъ точку ея пересѣченія—*перпендикулярна и къ самой плоскости*. Всякая другая пересѣкающая, неперпендикулярная къ плоскости называется *наклонною* къ послѣдней. Точки пересѣченія перпендикуляра и наклонной съ плоскостью называются *основаніями* перпендикуляра и наклонной.

Покажите гдѣ нибудь на стѣнахъ комнаты или на предметахъ въ классѣ нѣсколько прямыхъ перпендикулярныхъ къ плоскости.

465) Изъ точки данной на плоскости установить къ ней перпендикуляръ.

Достаточно ли, если устанавливаемая прямая будетъ перпендикулярна къ одной изъ прямыхъ проведенныхъ черезъ данную точку? (Нѣтъ, потому что такая прямая можетъ быть и наклонною). — А какъ же установить ее такъ, чтобы она была перпендикулярна ко всѣмъ прямымъ проведеннымъ черезъ данную точку? (Нужно установить ее такъ, чтобы наименьшій уголъ, стороны котораго перпендикулярны къ одной изъ прямыхъ на плоскости, проходящихъ черезъ точку пересѣченія былъ прямой — значитъ, чтобы она была перпендикулярна къ двумъ прямымъ проведеннымъ черезъ ея основаніе).

466) Черезъ точку данную на плоскости провести къ ней два перпендикуляра.

Возможно ли рѣшить эту задачу?—Отъ чего невозможно? (см. выше).

467) Черезъ точку внѣ плоскости провести къ ней перпендикуляръ (при помощи двухъ наугольниковъ или обыкновенныхъ треугольниковъ).

468) Внѣ плоскости поставить двѣ и болѣе точекъ, черезъ которыя проходила бы прямая перпендикулярная къ плоскости.

469) Черезъ точку, данную внѣ плоскости построить двѣ и болѣе наклонныхъ, образующихъ съ послѣднею углы въ 25°.

470) Внѣ плоскости поставить двѣ точки, черезъ которыя

проходила бы прямая наклоненная къ плоскости подъ угломъ 62°.

471) Черезъ двѣ и болѣе точекъ, взятыхъ на плоскости провести къ ней перпендикулярныя прямыя.

Обратите вниманіе на положеніе этихъ перпендикуляровъ одинъ относительно другаго. Вспомните въ какомъ положеніи находятся между собою два перпендикуляра въ одной и той же прямой? (они параллельны). — А перпендикуляры къ одной и той же плоскости? (также параллельны).

Выводы:

Черезъ точку на плоскости можно установить только одинъ перпендикуляръ къ послѣдней и сколько угодно наклонныхъ.

Черезъ точку, взятую внѣ плоскости можно установить къ послѣдней только одинъ перпендикуляръ и сколько угодно наклонныхъ.

Прямыя перпендикулярныя къ одной и той же плоскости будутъ параллельны между собою, а стало быть каждые два перпендикуляра находятся въ одной плоскости.

Всѣ плоскости, къ которымъ по всей длинѣ прилегаетъ отвѣсная прямая (нить отвѣса) называются *отвѣсными плоскостями*, а плоскости, перпендикулярныя къ отвѣсной называются *горизонтальными плоскостями*.

Покажите нѣсколько отвѣсныхъ и горизонтальныхъ плоскостей на предметахъ въ классѣ.

Отвѣсныя плоскости устанавливаются при помощи отвѣса. Если нить отвѣса прилегаетъ къ плоскости, то это знакъ, что послѣдняя установлена въ отвѣсномъ положеніи. Въ горизонтальное положеніе плоскости приводятся при помощи ватерпаса. Если при различныхъ положеніяхъ нижняго ребра ватерпаса, прилегающаго къ плоскости нить отвѣса прилегаетъ къ желобку въ отвѣсной доскѣ, то это показываетъ, что всѣ прямыя, проведенныя черезъ основаніе отвѣсной перпендикулярны къ ней—значитъ и самая плоскость будетъ перпендикулярною или — что все равно — горизонтальною. Всѣ прямыя, проведенныя въ горизонтальной плоскости будутъ горизонтальными, но не всѣ прямыя проведенныя въ отвѣсной плоскости будутъ отвѣсными.

XII.

472) Изъ точки, взятой внѣ плоскости опустить на нее перпендикуляръ и нѣсколько наклонныхъ, и сравнить всѣ эти прямыя по длинѣ.

Какая изъ прямыхъ оказалась кратчайшею? (сравни выше.)

473) Внѣ плоскости установить точку и опредѣлить разстояніе ея отъ плоскости.

474) Установить нѣсколько точекъ въ опредѣленномъ отстояніи отъ плоскости.

475) Установить плоскость въ опредѣленномъ отстояніи отъ данной точки.

476) Установить нѣсколько плоскостей равно отстоящихъ отъ данной точки.

477) Установить точку равно удаленную отъ двухъ данныхъ плоскостей.

Выводы:

Перпендикуляръ къ плоскости есть кратчайшая изъ прямыхъ, проведенныхъ къ плоскости отъ данной внѣ ея точки.

Отстояніе точки отъ плоскости измѣряется перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ нея на плоскость.

478) Изъ точки данной внѣ плоскости провести къ ней перпендикуляръ и нѣсколько равныхъ наклонныхъ.

479) На данной плоскости вычертить кругъ, всѣ точки, котораго были бы равно удалены отъ точки данной внѣ плоскости.

XIII.

Если установимъ двѣ точки въ равномъ разстояніи отъ плоскости и проведемъ черезъ нихъ прямую, то всѣ точки на ней будутъ равно удалены отъ плоскости; поэтому такая прямая, какъ бы далеко мы ее не продолжали никогда не встрѣтитъ плоскости, находясь на всемъ протяженіи въ одинаковомъ разстояніи отъ плоскости. Такая прямая называется *параллельною къ плос-*

кости. Черезъ точки неравноудаленныя отъ плоскости нельзя провести къ ней параллельной потому что разстояніе ея отъ плоскости въ одну какую либо сторону уменьшается сталобыть прямая, по мѣрѣ продолженія въ эту сторону, будетъ сближаться съ плоскостью и гдѣ нибудь неминуемо пересѣчетъ ее.

Покажите на стѣнахъ комнаты или на этихъ моделяхъ нѣсколько прямыхъ параллельныхъ плоскости.

480) Установить прямую параллельную данной плоскости.

Соедините основанія перпендикуляровъ, по которымъ откладывали разстояніе и посмотрите какое положеніе будетъ имѣть проведенная такимъ образомъ прямая по отношенію къ параллельной?

481) Установить нѣсколько прямыхъ параллельныхъ плоскости, неодинаково отстоящихъ отъ нея.

482) Установить прямую параллельную къ плоскости, которая была бы параллельна и данной прямой, проведенной на плоскости.

483) Установить двѣ и болѣе пересѣкающихся между собою прямыхъ параллельныхъ плоскости.

484) Черезъ точку данную внѣ плоскости провести одну, двѣ и болѣе прямыхъ параллельныхъ послѣдней.

485) Установить плоскость и прямую ей параллельную и затѣмъ провести на плоскости нѣсколько прямыхъ параллельныхъ первой прямой (т. е. параллельной къ плоскости).

486) Построить фигуру, стороны которой были бы параллельными къ данной плоскости.

487) Установить нѣсколько плоскостей параллельныхъ данной прямой.

488) Установить прямую параллельную двумъ даннымъ плоскостямъ.

О пересѣченіи плоскостей и двухгранномъ углѣ.

XIV.

489) Установите плоскость, на ней проведите прямую, а черезъ нее проведите другую плоскость неприлегающую къ первой.

Какъ можно назвать эти плоскости? (пересѣкающимися). Гдѣ пересѣкаются эти плоскости? (на проведенной прямой, которая принадлежитъ имъ обѣимъ).

Наблюдая множество плоскостей на окружающихъ насъ предметахъ мы замѣчаемъ, что онѣ могутъ сходиться и пересѣкаться одна другою.

Покажите нѣсколько паръ сходящихся плоскостей на предметахъ въ классѣ. Покажите *гдѣ* сходятся или пересѣкаются вотъ эти плоскости. Нѣтъ ли здѣсь такихъ двухъ плоскостей, которыя сходились бы на кривой или ломаной линiи? Отчего плоскости могутъ сходиться или пересѣкаться только на прямой? (Потому что только прямая можетъ одновременно находиться на обѣихъ плоскостяхъ).

490) На двухъ пересѣкающихся плоскостяхъ провести двѣ прямыя пересѣкающiяся между собою.

Гдѣ будетъ точка пересѣченiя прямыхъ? Неможетъ ли она быть внѣ плоскости? Опредѣлите положенiе этой точки.

491) Установить двѣ плоскости, которыя по продолженiи могли бы встрѣтиться и назначить прямую ихъ встрѣчи.

492) Построить нѣсколько плоскостей, проходящихъ через точку, данную на плоскости и пересѣкающихъ послѣднюю.

493) Построить нѣсколько плоскостей, пересѣкающихъ данную плоскость и проходящихъ черезъ точку, данную внѣ послѣдней.

Если плоскость, пересѣкающая данную плоскость проходитъ черезъ точку данную на послѣдней, то нельзя ли измѣнить положенiе пересѣкающей плоскости не отнимая ея отъ точки и оставля пересѣкающею?—А если точка дана внѣ плоскости?

494) Черезъ двѣ точки или прямую, данныя на плоскости провести нѣсколько плоскостей пересѣкающихъ первую плоскость.

495) Тоже самое при условiи, что данныя точки и прямая установлены внѣ плоскости.

496) Черезъ три точки, нележащiя въ прямомъ направленiи или двѣ прямыя пересѣкающiяся и данныя въ плоскости, провести плоскость пересѣкающую первую (плоскость).

Почему невозможно проведенiе такой плоскости (см. выше)?

497) Тоже самое при условiи, что точки и прямыя даны внѣ плоскости.

498) Нѣсколько точекъ, прямыхъ, кривыхъ и ломаныхъ установить въ плоскости пересѣкающей данную.

Выводы:

Плоскости пересѣкаются между собою по прямой линіи.

Черезъ точку на плоскости и внѣ плоскости можно построить множество плоскостей пересѣкающихъ данную плоскость.

Черезъ двѣ точки или прямую на плоскости и внѣ плоскости можно провести сколько угодно пересѣкающихъ данную плоскость.

Множество точекъ, прямыхъ, кривыхъ и ломаныхъ линій можно установить въ плоскости пересѣкающей данную.

499) Установить двѣ пересѣкающіяся плоскости и затѣмъ прямую, которая пересѣкала бы эти плоскости въ точкахъ равно удаленныхъ отъ прямой сѣченія.

500) Установить двѣ пересѣкающіяся плоскости и затѣмъ третью, которая пересѣкала бы первыя двѣ по прямымъ параллельнымъ прямой сѣченія ихъ (т. е. первыхъ плоскостей).

501) Установить плоскость параллельную прямой пересѣченія двухъ данныхъ плоскостей и построить прямыя пересѣченія третьей плоскости съ двумя первыми.

502) Установить плоскость перпендикулярную къ прямой сѣченія двухъ данныхъ плоскостей и построить прямыя сѣченія первой съ послѣдними.

503) Установить двѣ пересѣкающіяся плоскости, затѣмъ третью плоскость, къ которой прямая сѣченія первыхъ двухъ была бы наклонена подъ угломъ въ 45° и построить прямыя пересѣченія послѣдней съ двумя первыми.

504) Установить четыре плоскости такъ, чтобы прямая сѣченія первыхъ двухъ была перпендикулярна къ прямой сѣченія послѣднихъ двухъ.

XV.

Двѣ сходящіяся плоскости образуютъ уголъ, который называется *двуграннымъ угломъ*. Плоскости, образующія такой уголъ (*соотвѣтствующія сторонамъ линейнаго угла*), называются *гранями*, а прямая схожденія плоскостей, (*соотвѣтствующая вершинѣ линейнаго угла) называется ребромъ*.

Покажите нѣсколько двугранныхъ угловъ на предметахъ въ классѣ.

Величина двуграннаго угла зависитъ отъ степени раствоpeнія граней, которыя могутъ быть продолжены какъ угодно далеко, нисколько неизмѣняя величины угла.

Чтобы сравнить два данные двугранные угла нужно наложить одинъ изъ нихъ на другой такъ, чтобы ребро и одна изъ граней перваго совмѣстились съ ребромъ и одною изъ граней втораго. Если другая грань втораго пойдетъ между гранями перваго, то это показываетъ что второй уголъ меньше перваго,если же другая грань втораго пойдетъ внѣ граней перваго, то наоборотъ—второй больше перваго; совмѣщеніе же остальныхъ граней, наложенныхъ угловъ показываетъ, что они равны между собою.

Если устроить приборъ съ вращающимися около прямой сѣченія плоскостостями, которыя можно было бы сдвигать и раздвигать то, при помощи этого прибора можно устанавливать плоскости составляющія двугранный уголъ равный данному. Тогда можно было бы раздвинуть плоскости на столько, на сколько раздвинуты грани даннаго угла и затѣмъ установить плоскости въ такомъ положеніи, чтобы онѣ могли одновременно прилегать къ плоскостямъ прибора. Получившійся уголъ былъ бы равный данному,потому что онъ равенъ снятому на приборѣ.

Всѣ пересѣкающіяся плоскости образуютъ четыре двугранные угла. Если одну изъ плоскостей будемъ двигать около прямой пересѣченія, то разница между смежными углами будетъ уменьшаться или увеличиваться. Уменьшая разницу между углами, мы дойдемъ наконецъ до такого положенія плоскости, при которомъ смежные углы будутъ равны. Такое положеніе плоскости по отношенію къ другой плоскости (которую первая пересѣкаетъ) называется *перпендикулярнымъ*. Двугранные углы, образуемые перпендикулярными плоскостями будутъ прямыми двугранными углами. Существуетъ только одно положеніе пересѣкающей плоскости, при которомъ смежные двугранные углы выходятъ равными т. е. прямыми; если мы хотя немного отклонимъ пересѣкающую плоскость отъ этого (перпендикулярнаго) положенія, то одинъ изъ угловъ сейчасъ же станетъ больше другаго. По этому, черезъ одну прямую на плоскости можно провести только одну плоскость перпендикулярную данной.

Всѣ прямые двугранные углы равны.

Въ этомъ мы можемъ убѣдиться, если наложимъ одну пару смежныхъ двугранныхъ угловъ на другую такъ, чтобы прямыя сѣченія плоскостей и сами плоскости прилегали; тогда перпендикулярныя плоскости неминуемо будутъ также прилегать другъ къ другу потому что, иначе, черезъ одну прямую можно было бы провести двѣ перпендикулярныя плоскости.

Такъ какъ всѣ прямые двугранные углы равны между собою, то плоскости перпендикулярныя между собою можно было бы устанавливать при помощи какого нибудь прямаго двуграннаго угла на доскѣ или другомъ какомъ либо предметѣ. Стоило бы только ихъ раздвинуть такъ, чтобы онѣ могли одновременно совмѣщаться съ гранями нашего прямаго двуграннаго угла и онѣ были бы установлены въ требуемомъ положеніи. Но двугранные углы, подобно линейно-плоскостнымъ, можно измѣрять линейными или плоскими углами. Если изъ точки, взятой на ребрѣ двуграннаго угла проведемъ въ плоскостяхъ граней прямыя перпендикулярныя къ ребру, то образуется линейный уголъ называемый *линейнымъ или плоскимъ угломъ, соотвѣтствующимъ двугранному.* Оказывается, что этотъ уголъ всегда выходитъ прямымъ при перпендикулярности граней; острымъ когда плоскости образуютъ острый двухгранный уголъ, тупымъ, когда двугранный уголъ тупой.

При равенствѣ двугранныхъ угловъ, углы образуемые прямыми перпендикулярными къ ребру всегда равны, въ чемъ можно убѣдиться наложеніемъ. Если совмѣстимъ равные двухгранные углы такъ, чтобы вершины линейныхъ угловъ имъ соотвѣтствующихъ, лежащія на ребрахъ совпадали, тогда стороны линейныхъ угловъ неминуемо совпадутъ какъ перпендикулярныя къ общему ребру и выходящія отъ одной точки (см. выше).

XVI.

505) Построить два неравные двугранные угла.

506) Установить двугранный уголъ равный данному двугранному углу.

507) Измѣрить двугранный уголъ при помощи транспортира.

508) Провести плоскость, пересѣкающую данную плоскость подъ угломъ 63°.

509) Построить двугранный уголъ равный суммѣ двухъ и болѣе, данныхъ двугранныхъ угловъ.

510) Построить двугранный уголъ равный разности двухъ данныхъ двугранныхъ угловъ.

511) Построить двугранный уголъ въ 2, 3, $3^1/_2$ и т. д. раза большій даннаго двуграннаго угла.

512) Раздѣлить двугранный уголъ на нѣсколько равныхъ частей.

513) Построить двугранный уголъ въ нѣсколько разъ меньшій даннаго.

514) Провести плоскость перпендикулярную къ данной плоскости.

515) Черезъ данную точку на плоскости построить нѣсколько плоскостей перпендикулярныхъ къ данной плоскости.

516) Черезъ точку, данную внѣ плоскости построить нѣсколько плоскостей перпендикулярныхъ съ данной плоскости.

Можно ли измѣнять положеніе плоскости, перпендикулярной къ данной плоскости и проходящей черезъ точку данную на плоскости или внѣ ея — не отнимая отъ послѣдней (т. е. точки) и оставляя ее перпендикулярной къ данной плоскости.

517) Черезъ двѣ точки или прямую на плоскости провести нѣсколько плоскостей перпендикулярныхъ къ данной плоскости.

518) Черезъ двѣ точки или прямую внѣ плоскости провести нѣсколько плоскостей перпендикулярныхъ къ данной плоскости.

Можно ли измѣнять положеніе плоскости, перпендикулярной къ данной плоскости и проходящей черезъ двѣ точки или прямую на плоскости или внѣ ея—не отымая отъ точекъ или прямой и оставляя ее перпендикулярною къ плоскости?—А если прямая будетъ перпендикулярна къ плоскости, то можно ли провести черезъ нея наклонную плоскость?

519) Установить нѣсколько точекъ, прямыхъ, ломаныхъ и кривыхъ на плоскости, перпендикулярной данной плоскости.

520) Установить нѣсколько фигуръ въ плоскости перпендикулярной къ данной.

521) Установить плоскость, перпендикулярную къ данной плоскости и параллельную данной прямой.

522) Установить плоскость перпендикулярную данной плоскости и въ тоже время перпендикулярную къ данной прямой.

Выводы:

Черезъ данную точку на плоскости и внѣ ея можно провести сколько угодно перпендикулярныхъ плоскостей.

Черезъ двѣ точки или прямую на данной плоскости и внѣ ея можно провести только одну плоскость, перпендикулярную къ данной.

Множество точекъ и линій можетъ быть установлено въ плоскости перпендикулярной къ данной плоскости.

Можно установить сколько угодно плоскостей перпендикулярныхъ къ данной плоскости и параллельныхъ къ данной на плоскости или внѣ плоскости, прямой.

Плоскость, перпендикулярная къ данной плоскости и въ тоже время, перпендикулярная къ данной прямой можетъ быть установлена только тогда, если эта прямая находится на данной плоскости или параллельно ей.

Прямая перпендикулярная къ одной изъ перпендикулярныхъ между собою плоскостей параллельна другой плоскости.

Плоскость, проходящая черезъ прямую перпендикулярную къ другой плоскости, перпендикулярна къ послѣдней.

Горизонтальная и отвѣсныя плоскости взаимно перпендикулярны, а потому по установленной горизонтальной плоскости можно установить отвѣсную и наоборотъ—по отвѣсной горизонтальную.

XVII

523) Построить двѣ перпендикулярныя между собою и взаимно пересѣкающіяся плоскости, въ одномъ изъ двугранныхъ угловъ установить точку, отъ нея опустить перпендикуляры на плоскость и назначить основанія этихъ перпендикуляровъ на плоскостяхъ.

524) На прямой, установленной въ прямомъ двугранномъ углѣ взять нѣсколько точекъ и отъ концовъ прямой и этихъ точекъ опустить на обѣ плоскости угла перпендикуляры и основанія этихъ перпендикуляровъ обозначить.

*

Какія линіи обозначаютъ основанія перпендикуляровъ на обѣихъ плоскостяхъ? Не обозначаютъ ли сами перпендикуляры какой либо плоскости, положеніе которой опредѣлено относительно граней угла?

Построить пересѣченіе данной прямой съ обѣими гранями угла

525) Въ пространствѣ прямаго двуграннаго угла построить плоскость параллельную ребру угла и построить прямыя пересѣченія этой плоскости съ гранями угла.

Построить пересѣченіе плоскости образующей, съ ребромъ угла линейно плоскостной уголъ въ 45°.

Построить пересѣченіе плоскости, перпендикулярной къ одной изъ граней угла.

Построить пересѣченіе плоскости съ гранями угла, параллельной одной изъ нихъ.

XVIII.

Если черезъ три и болѣе точки, или двѣ и болѣе пересѣкающіяся прямыя, равноудаленныя отъ данной плоскости провести еще плоскость, то эта послѣдняя будетъ равно удалена отъ данной плоскости на всемъ протяженіи. Какую бы точку мы не взяли на этой плоскости, она на столько же удалена отъ данной какъ и остальныя точки.

Плоскость, которой всѣ точки равно удалены отъ данной плоскости называется *параллельною* къ данной.

Какъ бы далеко мы не продолжали параллельныя плоскости онѣ никогда не встрѣтятся, плоскости же, разстояніе между которыми въ одну какую либо сторону уменьшается, сближаясь по мѣрѣ продолженія въ эту сторону, гдѣ нибудь да сойдутся.

526) Провести нѣсколько плоскостей параллельныхъ данной плоскости.

527) Черезъ данную точку внѣ данной плоскости провести нѣсколько плоскостей параллельныхъ данной.

Можно ли измѣнять положеніе плоскости параллельной

данной и проходящей черезъ точку внѣ ея, не отнимая отъ послѣдней и оставляя плоскость параллельною къ данной?

528) Черезъ данную точку на плоскости провести плоскость параллельную послѣдней.

529) Провести плоскость параллельную данной плоскости и, въ то же время, параллельную данной на плоскости прямой.

Можно ли провести плоскость параллельную данной плоскости, и которая бы могла встрѣтиться съ какой либо прямой на плоскости?

530) Провести плоскость, параллельную данной плоскости и, въ то же время, параллельную данной, внѣ плоскости, прямой.

Можно ли провести такую плоскость при томъ условіи, если данная прямая не параллельна данной плоскости?

При какомъ же условіи возможно рѣшеніе этой задачи?— Можетъ ли быть данная прямая непараллельная одной изъ параллельныхъ плоскостей, параллельною къ остальнымъ?

531) Провести плоскость параллельную данной плоскости и перпендикулярную къ данной прямой.

При какомъ условіи возможно рѣшеніе этой задачи? Можетъ ли, одна изъ параллельныхъ плоскостей быть перпендикулярной къ прямой, наклонной къ другой плоскости?

532) Провести нѣсколько плоскостей перпендикулярныхъ къ какой либо прямой.

Каково будетъ положеніе проведенныхъ плоскостей?

533) Къ одной изъ параллельныхъ плоскостей провести прямую перпендикулярную и продолжить ее до пересѣченія съ остальными.

Каково будетъ положеніе прямой къ остальнымъ плоскостямъ?

534) Черезъ данную прямую провести плоскость параллельную данной плоскости.

При какомъ условіи можно исполнить эту задачу? Можно ли провести плоскость параллельную данной черезъ прямую, перпендикулярную или наклонную къ послѣдней?

535) Построить фигуру въ плоскости параллельной данной плоскости.

536) Обозначить плоскость параллельную одной изъ граней даннаго двуграннаго угла и построить прямую пересѣченія ея съ другою гранью.

Какое положенiе будетъ имѣть построенное пересѣченiе къ ребру двуграннаго угла?

537) Установить двѣ плоскости параллельныя между собою и затѣмъ третью пересѣкающую первыя двѣ и построить прямыя пересѣченiя.

Сравните величину двугранныхъ угловъ образованныхъ этими плоскостями.

Выводы:

Черезъ одну точку внѣ данной плоскости можно установить только одну плоскость параллельную данной.

Черезъ точку на плоскости нельзя провести плоскость параллельную данной п. ч. она сольется съ послѣдней.

Всѣ прямыя, проведенныя на одной изъ параллельныхъ плоскостей, будутъ параллельны другой плоскости.

Плоскость, параллельная данной прямой, можетъ быть параллельна другой плоскости только въ то время, когда прямая параллельна послѣдней плоскости.

Плоскость перпендикулярная къ данной прямой можетъ быть параллельною къ данной плоскости только въ такомъ случаѣ, если эта послѣдняя перпендикулярна къ прямой.

Прямая перпендикулярная къ одной изъ параллельныхъ сторонъ—перпендикулярна и къ остальнымъ.

Черезъ данную прямую можно провести параллельную къ данной плоскости только въ такомъ случаѣ, если эта прямая параллельна къ плоскости.

Параллельныя плоскости пересѣкаются третьею по прямымъ параллельнымъ.

При пересѣченiи двухъ параллельныхъ плоскостей третьею образуется нѣсколько паръ равныхъ двугранныхъ угловъ.

Трегранные и многогранные углы.

XVII.

Три и болѣе плоскостей пересѣкаются по тремъ и болѣе ребрамъ, и могутъ имѣть одну общую точку. При этомъ образуются *многогранные углы*, которые, по числу граней, называются *трегранными, четырегранными* и вообще *многогранными* углами.

Плоскости, образующія многогранные углы называются *гранями*, а общая точка *вершиною*. Ребра многограннаго угла образуютъ линейные или плоскіе углы, которые называются соотвѣтствующими многограннымъ угламъ.

Многогранные углы бываютъ большими или меньшими въ зависимости отъ растворенія граней; вмѣстѣ съ раствореніемъ граней мн. угла увеличиваются и плоскіе соотвѣтствующіе многогранному.

Равными многогранными углами называются такіе углы, которые при наложеніи совмѣщаются во всѣхъ частяхъ, т. е. въ вершинахъ, ребрахъ и граняхъ. Въ равныхъ многогранныхъ углахъ, оказываются равными и двугранные углы, а также и плоскіе углы. На этомъ основаніи, построеніе многограннаго угла равнаго данному возможно, при помощи отдѣльныхъ граней опредѣляющихся линейными и двухгранными углами.

538) Построить трегранный уголъ равный данному.

539) Построить четырегранный уголъ, у котораго плоскіе углы равны: 25^0, 35^0, 45^0 и 60^0.

Грани всякаго двуграннаго угла можно развернуть въ плоскости, для чего необходимо построить одинъ за другимъ всѣ линейные углы, оставляя прямыя отдѣляющія ихъ.

540) Построить пятигранный уголъ съ линейными углами въ 15°, 60, 75, 35 и 25°.

Правильными многогранными углами называются тѣ, у которыхъ плоскіе и двугранные углы равны между собою.

541) Построить нѣсколько многогранныхъ угловъ съ плоскими углами—въ 25°.

542) Построить многогранный уголъ и затѣмъ плоскость

пересѣкающую грани этого угла и построить прямыя пересѣченія.

543) Построить прямыя пересѣченія плоскости параллельной одному изъ реберъ многограннаго угла.

544) Построить ломаную пересѣченія грани многограннаго угла—плоскостью перпендикулярною къ одному изъ реберъ.

Всякій многогранный уголъ можетъ быть раздѣленъ на части, именно на трехгранные углы—плоскостями, проведенными черезъ двѣ несмежныя грани.

545) Построить многогранный уголъ и раздѣлить его на трегранные углы плоскостями, проходящими черезъ двѣ несмежныя грани.

О тѣлахъ.

I.

Всякій предметъ, ограниченный со всѣхъ сторонъ поверхностями мы будемъ называть *тѣломъ*. Такъ—столъ, камень, книга и т. п., ограниченные со всѣхъ сторонъ поверхностями—суть тѣла. Тѣлами же называются и пустоты, ограниченныя поверхностями; такъ: комната, внутренность—шкатулки, класснаго ящика и т. д. суть также тѣла п. ч. онѣ ограничены поверхностями. Многія изъ видимыхъ нами тѣлъ ограничены *плоскими поверхностями*, а другія—*кривыми*. По этому признаку тѣла могутъ быть подраздѣлены на *плоскостныя*, ограниченныя плоскостями и *кривоповерхностныя*, ограниченныя кривыми поверхностями.

Есть и такія тѣла, которыя имѣютъ смѣшанную поверхность, т. е. состоящую изъ плоскостей и кривыхъ поверхностей; эти послѣднія будемъ называть—*тѣлами съ смѣшанными поверхностями*.

Тѣла могутъ быть подраздѣлены также (подобно фигурамъ) на *правильныя и неправильныя*. Первыя, подобно правильнымъ фигурамъ, имѣютъ со всѣхъ сторонъ совершенно правильное образованіе, всѣ части ихъ равны между собою, а потому поверхности ихъ могутъ быть составлены изъ одинаковыхъ частей, однообразно расположенныхъ относительно центра (средней точки). Вторыя имѣютъ неправильное —

не однообразное образованіе, а потому части поверхностей ихъ неодинаковаго вида и величины и неодинаково расположены относительно центральной точки.

Равными тѣлами мы будемъ называть такія, которыхъ по верхности, при наложеніи, могутъ прилегать во всѣхъ частяхъ. Такъ, если въ кусокъ размягченнаго воска или сырой глины, мы вдавимъ какое либо твердое тѣло, то образовавшаяся пустота будетъ представлять новое тѣло совершенно равное первому т. е., если вложимъ тѣло въ форму, то убѣдимся въ полнѣйшемъ и повсемѣстномъ прилеганіи поверхностей ихъ. При помощи упомянутой формы можно сравнить два или нѣсколько массивныхъ тѣлъ. Если, въ снятую съ одного изъ сравниваемыхъ тѣлъ форму, вкладывать остальныя тѣла, тогда возможность прилеганія поверхностей послѣднихъ съ поверхностію формы показываетъ равенство тѣлъ, наоборотъ—невозможность совмѣщенія показываетъ не равенство ихъ.

Подобными тѣлами мы будемъ называть тѣла сходныя по виду, но не одинакія по величинѣ.

Плоскостныя тѣла.

Кубъ.

II.

Тѣла, ограниченныя плоскостями называются *многогранниками*, а самыя плоскости, изъ которыхъ составляется ихъ поверхность—*гранями.*

Изъ многогранниковъ, встрѣчающихся между окружающими насъ предметами особенное вниманіе, по простотѣ и правильности образованія—обращаетъ на себя *правильный прямоугольный шестигранникъ*, называемый *кубомъ.*

Кубъ имѣетъ:

Вершинъ . . . . 8.
Реберъ . . . . 12.
Граней . . . . 6.
Линейныхъ угловъ . . . . 24.

Двугранныхъ . . . . 12.
Трегранныхъ . . . . 8.

Вершины куба (точки встрѣчи реберъ) находятся на одномъ и томъ же разстояніи отъ центра (средней точки); каждая изъ нихъ, при этомъ, ровно удалена отъ трехъ сосѣднихъ вершинъ. Всѣ ребра куба равны между собою и сходятся къ вершинамъ по три.

Плоскіе углы, образуемые ребрами прямые,и потому равные.

Ребра, пересѣкающія плоскости граней перпендикулярны къ послѣднимъ.

Всѣ ребра куба распредѣляются на три группы, въ каждой изъ которыхъ по четыре ребра параллельныхъ между собою.

Каждое ребро куба имѣетъ четыре ребра, на этомъ же тѣлѣ, непараллельныхъ ему и непересѣкающихся съ нимъ (находящихся съ нимъ въ разныхъ плоскостяхъ). Грани куба сходятся по двѣ къ ребрамъ и образуютъ прямые, стало быть, равные между собою двугранные углы.

Каждая грань куба имѣетъ на этомъ же тѣлѣ другую грань параллельную первой.

Каждая грань куба пересѣкается съ четырьмя другими гранями этого тѣла.

Грани куба, по три, сходятся къ вершинамъ и образуютъ прямые—стало быть равные трегранные углы.

Всѣ грани куба имѣютъ фигуру квадрата,образуемаго ребрами тѣла, а потому равные между собою.

Изъ этого видно, что кубъ тѣло правильное, части поверхности котораго одинаково образованы и одинаково расположены.

III.

Вся поверхность куба можетъ быть развернута и совмѣщена съ плоскостью; тогда она представляется фигурой составленной изъ 6—7 квадратовъ, приложенныхъ одинъ къ другому равными сторонами,и которые будутъ равными фигурамъ граней.

546) Вычертить поверхность даннаго куба, развернутую и совмѣщенную съ плоскостью.

547) Фигуру развернутой поверхности куба, вырѣзать изъ бумаги и построить изъ нея кубъ.

548) Вычертить шесть квадратовъ со сторонами въ одинъ вершокъ дл. прилегающихъ др. къ др. (равными сторонами) и вырѣзавъ по этой фигурѣ поверхность, построить кубъ.

IV.

Равными кубами называются такіе, которые, при наложеніи одинъ на другой, во всѣхъ частяхъ совпадаютъ.

Дѣйствительное наложеніе одного куба на другой можно дѣлать въ такомъ случаѣ, если одинъ изъ нихъ образованъ поверхностями ограничивающими пустоту — опредѣленную часть пространства кубической формы, тогда массивный кубъ можно вложить въ кубическую пустоту и совмѣщеніе поверхностей во всѣхъ частяхъ покажетъ равенство разсматриваемыхъ тѣлъ. Если же оба куба массивные, тогда возможно только наложеніе воображаемое.

Поверхности двухъ кубовъ совмѣщаются при наложеніи, если одно изъ реберъ одного равно какому нибудь ребру другаго п. ч. тогда всѣ части поверхности одного могутъ быть совмѣщены съ частями поверхности другаго.

Дѣйствительно, представимъ себѣ, что одинъ изъ данныхъ кубовъ наложенъ на другой такъ, чтобы какіе либо изъ равныхъ реберъ прилегали др. къ др. и плоскость одной изъ сходящихся къ этому ребру граней, прилегала къ соотвѣтствующей плоскости другой грани; тогда плоскость другой грани перваго приляжетъ къ соотвѣтствующей плоскости другой грани втораго куба, по равенству двугранныхъ угловъ (они оба въ кубахъ прямые); совмѣстятся также и фигуры граней потому что они суть квадраты имѣющіе по одной изъ сторонъ равныхъ между собою (см. выше). Точно также докажемъ, что всѣ остальныя грани прилегающія къ совмѣщеннымъ у одного куба, совмѣстятся съ гранями другаго.

549) Построить кубъ равный данному.

550) Вычертить развернутыя и совмѣщенныя съ плоскостью поверхности двухъ равныхъ кубовъ.

551) Построить кубъ, котораго поверхность была бы равна развернутой поверхности даннаго куба.

552) Построить кубъ по данной сторонѣ одной изъ его граней (ребру).

553) Обозначить кубъ равный—данному одними ребрами, опредѣляющими направленіе плоскостей граней.

554) Обозначить ребрами три куба, изъ которыхъ первый былъ бы меньше втораго, а третій больше втораго.

V.

556) Найти площадь одной изъ граней даннаго куба.

557) Вычислить поверхность даннаго куба.

558) Найти сумму поверхностей двухъ и болѣе данныхъ кубовъ.

559) Найти, насколько поверхность одного изъ данныхъ кубовъ больше или меньше поверхности другаго.

560) Построить кубъ, площадь одной изъ граней котораго была бы въ 4 кв. дюйма.

561) Построить два куба, изъ которыхъ поверхность одного была бы больше поверхности другаго.

562) Построить два куба, изъ которыхъ поверхность перваго была бы на 18 кв. вершк. больше поверхности другаго куба.

563) Построить кубъ, поверхность котораго была бы въ 4 раза больше поверхности другаго куба.

564) Найти площадь грани куба, котораго поверхность равняется 24 кв. дюймамъ.

565) Найти длину ребра куба, поверхность котораго равняется 54 кв. дюймамъ.

VI.

Всякіе два куба подобны между собою потому что углы у нихъ прямые, стало быть равные, а длина реберъ и площади граней въ одномъ изъ нихъ въ одно и тоже число разъ уменьшены или увеличены относительно другаго. Это обусловливается равенствомъ всѣхъ частей между собою: если длина одного ребра увеличена вдвое, то и другаго, равнаго первому, увеличена во столько же разъ; тоже самое можно сказать и о площадяхъ граней.

566) Построить кубъ, подобный данному съ уменьшеніемъ длины реберъ въ $3^1/_2$ раза.

567) Построить два куба подобные между собой, изъ которыхъ у перваго поверхность была бы въ 3 раза меньше чѣмъ у втораго.

VII.

568) Построить кубъ и затѣмъ прямую пересѣкающую тѣло, и обозначить точки перѣсѣченія прямой съ поверхностью его.

Въ сколькихъ точкахъ пересѣкаетъ кубъ прямая линія? Нельзя ли построить прямую такъ, чтобы она пересѣкала кубъ болѣе нежели въ двухъ точкахъ? А въ сколькихъ точкахъ можетъ пересѣкать кубъ кривая и ломаная линіи?

569) Построить кубъ и затѣмъ прямую, которая пересѣкала бы поверхность куба въ двухъ вершинахъ трегранныхъ угловъ. Сколько такихъ прямыхъ можно провести?

Вычертите на доскѣ данный кубъ, какъ онъ видится вамъ съ одной какой либо стороны и обозначьте на чертежѣ положеніе прямой пересѣкающей и точки ея пересѣченія *).

570) Построить кубъ и затѣмъ прямую, которая пересѣкала бы поверхность его въ срединныхъ точкахъ двухъ реберъ.

---

*) Въ составленіи такихъ чертежей преподаватель упражняетъ учениковъ при всякомъ удобномъ случаѣ и при дальнѣйшихъ задачахъ.

Сколько такихъ прямыхъ можно провести? Какое направленіе онѣ будутъ имѣть по отношенію къ направленію реберъ и плоскостей граней?

571) Построить нѣсколько прямыхъ, которыя пересѣкали бы грани даннаго куба въ центрѣ фигуры.

572) Установить прямую, проходящую черезъ центръ фигуры одной изъ граней даннаго куба и перпендикулярную къ этой грани.

Какое направленіе будетъ имѣть эта прямая по отношенію къ остальнымъ гранямъ куба? Гдѣ она пересѣчетъ противуположную грань?

573) Черезъ центръ фигуры одной изъ граней даннаго куба провести прямую пересѣкающую тѣло и параллельную къ одной изъ остальныхъ граней.

Въ какомъ направленіи будетъ проведенная прямая къ плоскостямъ другихъ граней?

574) Черезъ точку, взятую по срединѣ одного изъ реберъ даннаго куба провести прямую пересѣкающую тѣло и параллельную къ одной изъ граней перпендикулярныхъ къ этому ребру.

Гдѣ будетъ находиться другая точка пересѣченія прямой съ поверхностью куба? На какой изъ граней? Въ какомъ разстояніи отъ стороны фигуры, находящейся въ плоскости перпендикулярной къ ребру, на которомъ взята точка?

575) Черезъ точку, взятую на отвѣсномъ ребрѣ даннаго куба, провести горизонтальную прямую, образующую съ гранями двуграннаго угла, сходящимися къ этому ребру—равные углы.

Гдѣ будетъ другая точка пересѣченія проведенной прямой? (На противуположномъ ребрѣ). Въ какомъ разстояніи отъ концевъ ребра?

576) Черезъ двѣ точки или прямую данныя внѣ куба, провести прямую пересѣкающую тѣло и обозначить точки пересѣченія его съ прямою.

577) Внѣ куба взять точку и отъ нея, къ вершинамъ фигуры одной изъ граней, провести прямыя и построить точки встрѣчи этихъ фигуръ съ поверхностью куба.

VIII.

578) Обозначить ребрами кубъ и затѣмъ построить нѣсколько плоскостей пересѣкающихъ поверхность его.

Сколько плоскостей можно провести пересѣкающихъ поверхность куба?

579) Установить плоскость, которая бы имѣла съ поверхностью куба только одну общую точку.

580) Установить плоскость, которая имѣла бы съ поверхностью куба только одну прямую.

581) Установить плоскость, которая пересѣкала бы кубъ по двумъ, тремъ, четыремъ, пяти и болѣе прямымъ.

Можно-ли установить плоскость пересѣкающую данный кубъ по двумъ прямымъ? А по тремъ и по четыремъ? А нельзя ли провести плоскость, пересѣкающую кубъ по пяти и болѣе прямымъ?

582) Черезъ точку данную внѣ куба провести двѣ плоскости, изъ которыхъ одна пересѣкала бы данный кубъ по тремъ, а другая по четыремъ прямымъ и построить фигуры сѣченія поверхности куба этими плоскостями.

583) Черезъ два противуположныя параллельныя ребра даннаго куба провести плоскость и построить фигуру сѣченія ея съ поверхностью тѣла.

584) Черезъ средину одного изъ реберъ даннаго куба провести плоскость перпендикулярную этому ребру и построить фигуру пересѣченія ея съ поверхностью куба.

Въ какомъ направленіи построенная плоскость будетъ къ остальнымъ ребрамъ и къ гранямъ куба? Въ какомъ разстояніи отъ концевъ она пересѣчетъ встрѣчныя ребра?

585) Черезъ двѣ противуположныя вершины куба провести нѣсколько плоскостей пересѣкающихъ его поверхность и построить фигуру сѣченія.

586) Черезъ прямую, данную внѣ куба и параллельную четыремъ изъ его (параллельныхъ) реберъ провести нѣсколько плоскостей пересѣкающихъ поверхность куба и построить фигуры сѣченія.

587) Черезъ точку, данную внѣ куба провести плоскость пе-

ресѣкающую его поверхность и проходящую черезъ двѣ противуположныя вершины куба и построить фигуру сѣченія.

42) Провести нѣсколько параллельныхъ плоскостей пересѣкающихъ поверхность куба и построить фигуры сѣченія.

43) Обозначить двѣ взаимно перпендикулярныя плоскости, пересѣкающія поверхность куба и построить фигуры сѣченія ихъ съ поверхностью тѣла.

Всѣ эти задачи продѣлываются учениками при помощи выше указанныхъ моделей и вычерчиваются въ тетради, видимыя съ одной стороны, изображенія этихъ построеній.

Прямоугольные шестигранники.

IX.

Если построить плоскость, проходящую черезъ средину одного изъ реберъ даннаго куба и перпендикулярную къ этому ребру, то разсматриваемое тѣло раздѣляется этою плоскостію на два равные между собою шестигранника. Эти тѣла называемыя прямоугольными шестигранниками, имѣютъ много сходнаго съ кубомъ, но во многомъ, какъ тѣла *неправильныя*, и отличаются отъ него. Такіе прямоугольные шестигранники можно также получить,прикладывая два или нѣсколько кубовъ одинъ къ другому равными гранами.

Прямоугольный шестигранникъ имѣетъ одинаковое съ кубомъ число вершинъ, реберъ, граней, линейныхъ, двугранныхъ и трегранныхъ угловъ. Всѣ углы у этого тѣла, также какъ и у куба, прямые и стало быть равные. Всѣ ребра также распредѣляются на три группы параллельныхъ реберъ. Грани также попарно параллельны. Отличіе же прямоугольнаго шестигранника отъ куба заключается лишь въ томъ, что *только параллельныя ребра и грани равны между собою.*

На этомъ основаніи, при вычисленіи поверхности разсматриваемаго тѣла необходимо вычислить площади трехъ граней различной фигуры и, удвоивъ каждую изъ нихъ, взять сумму полученныхъ площадей.

Поверхность прямоуг. шестигр. можетъ быть, подобно поверхности куба, развернута и совмѣщена съ плоскостію и представляетъ фигуру составленную изъ прямоугольниковъ, порознь равныхъ соотвѣтствующимъ фигурамъ граней тѣла.

Равенство прямоугольныхъ шестигранниковъ обусловливается равенствомъ трехъ соотвѣтственныхъ реберъ какого нибудь изъ трегранныхъ угловъ въ каждомъ изъ нихъ. Впрочемъ, въ томъ случаѣ, если двѣ изъ граней прям. шестигран. имѣютъ квадратную фигуру, то достаточно, чтобы два соотвѣтсвенныхъ ребра одного изъ трегранныхъ угловъ на обоихъ шестигранникахъ были равны между собою.

Для построенія прямоугольнаго шестигранника, необходимо знать длину трехъ реберъ одного изъ трехгранныхъ угловъ тѣла, а въ томъ случаѣ, если извѣстно, что двѣ грани его должны имѣть квадратную фигуру, достаточно знать длину двухъ реберъ одного изъ трехгранныхъ угловъ.

Для построенія прям. шестигран. достаточно также знать площади двухъ граней одного изъ трехгранныхъ угловъ и однаго ребра, тогда остальныя два ребра могутъ быть найдены.

Прямоуг. шестигран. могутъ быть различнаго вида, что зависитъ отъ фигуры граней. Подобные прям. шестигранники тѣ, у которыхъ фигуры соотвѣтственныхъ граней подобны. Подобіе прям. шестигранниковъ можетъ быть доказано тогда, если ребра одного изъ нихъ въ одно и тоже число разъ больше или меньше другаго п. ч. тогда фигуры граней оказываются подобными, такъ какъ углы у фигуръ прямые—стало быть равные.

Если извѣстно, что три грани трегравнаго угла одного изъ прям. шестигранниковъ подобны тремъ соотвѣтственнымъ гранямъ такого же угла въ другомъ прям. шестигранникѣ, то такія тѣла подобны между собою п. ч. тогда фигуры всѣхъ граней одного оказываются подобными фигурамъ всѣхъ граней другаго.

Прям. шестигранники подобны и тогда, если три ребра, сходящіяся къ одной вершинѣ одного въ одно и тоже число разъ меньше или больше соотвѣтственныхъ граней другаго п. ч. тогда всѣ ребра перваго оказываются въ одно и тоже число разъ больше или меньше реберъ другаго.

Всѣ задачи, приведенныя въ статьѣ о кубѣ, продѣлываются и въ примѣненіи къ прямоугольному шестиграннику.

Призмы.

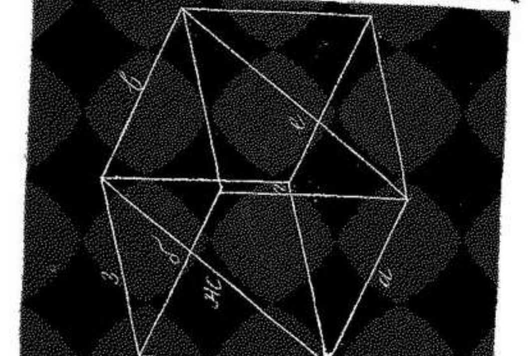
X.

Кубъ и прямоуг. шестигранникъ могутъ быть раздѣлены на части — равныя и неравныя плоскостями, идущими въ разнымъ направленiяхъ. Если разсматриваемыя тѣла пересѣкаются плоскостами параллельными одной изъ граней т. е. перпендикулярными къ другимъ—тогда они раздѣляются на тѣла прямоугольныя, которыя будутъ шестигранниками. Но можно провести плоскость такъ, что она разсѣчетъ прямоугольный шестигранникъ или кубъ на части, которыя по виду и по числу граней значительно отличаются отъ разсмотрѣнныхъ выше тѣлъ Представимъ себѣ плоскость, проходящую черезъ два противуположныя ребра куба или прям. шестигранника, то эта плоскость разсѣчетъ тѣло на два равныя по величинѣ и одинаковыя по виду тѣла, отличающiяся отъ куба.

Эти новыя тѣла имѣютъ:

Вершинъ	6.
Реберъ	9.
Граней	5.
Линейныхъ угловъ	18.
Двугранныхъ угловъ	9.
Трегранныхъ угловъ	6.

Всѣ ребра этого тѣла подраздѣляются на четыре группы;



параллельныхъ между собою реберъ; къ первой изъ нихъ

принадлежатъ ребра *а*, *б* и *в*; ко второй ребра *г* и *д*, къ третьей—*i* и *з* и къ четвертой—*е* и *ж*.

Грани здѣсь двоякаго вида: три изъ нихъ пересѣкающія-ся по параллельнымъ ребрамъ прямоугольника, а остальныя двѣ параллельныя между собою треугольной фигуры.

Изъ 18-ти линейныхъ угловъ — 14 (по четыре угла въ каждомъ изъ четыреугольныхъ граней и поодному углу въ каждомъ изъ треугольныхъ граней) прямые, а остальные — острые; изъ 9-ти двугранныхъ угловъ—5 прямые, (образуемые у реберъ *б*, *г*, *з*, *д* и *i*) а остальные 4 острые; изъ 6 трегранныхъ угловъ — 2 прямые, (образованныя гранями сходящимися у вершинъ прямыхъ угловъ треугольныхъ граней), а остальные острые.

Поверхность разсматриваемаго четырегранника можетъ быть развернута и совмѣщена съ плоскостью. При этомъ образуется фигура, состоящая изъ трехъ равновысотныхъ четыреугольниковъ и къ нимъ примкнутыхъ (съ обѣихъ сторонъ) прямоугольныхъ треугольниковъ.

Чтобы вычислить поверхность этаго пятигранника нужно найти во 1-хъ площадь одной изъ параллельныхъ треугольныхъ граней; затѣмъ площадь одной изъ четыреугольныхъ граней, образующихъ прямой уголъ и наконецъ площадь остальной четыреугольной грани.

Сумма удвоенной площади треугольника вмѣстѣ съ удвоенной же площадью прямоугольника и съ площадью остальнаго прямоугольника дастъ поверхность рассматриваемаго пятигранника.

Вычисленіе поверхности разсматриваемаго тѣла можетъ быть еще упрощено, если обратимъ вниманіе на то обстоятельство, что сумма площадей четыреугольныхъ граней равна площади прямоугольника, у котораго высота будетъ равна одному изъ трехъ равныхъ и параллельныхъ реберъ, а основаніе суммѣ всѣхъ сторонъ одной изъ треугольныхъ граней.

590) Данный кубъ раздѣлить на два пятигранника плоскостью проходящею черезъ два несмежныя параллельныя ребра и затѣмъ развернуть на плоскости поверхность одного изъ полученныхъ пятигранниковъ и измѣрить поверхность другаго.

Если разсѣчемъ данный прямоугольный шестигранникъ діагональною плоскостью и сравнимъ одинъ изъ получив-

шихся такимъ образомъ равныхъ пятигранниковъ съ пятигранникомъ получающимся при такомъ же раздѣленіи плоскостью—куба, то оказывается, что упомянутые пятигранники, будучи сходны въ большей части признаковъ, имѣютъ однакоже признаки, по которымъ могутъ быть и различаемы.

Признаки различія сводятся къ слѣдующимъ:

а) Стороны, образующія прямой уголъ прям. треугольниковъ у послѣдняго вида пятигранникомъ неравны между собою, а вмѣстѣ съ этимъ и противолежащія острые углы также неравны.

б) Четыреугольныя грани двугран. угла не квадраты и неравны между собою; въ связи съ этимъ и острые двугранные углы, противолежащіе этимъ гранямъ неравны между собою.

На этомъ основаніи развернутая поверхность разсматриваемаго четырегранника будетъ составлена изъ трехъ, неравныхъ между собою четыреугольниковъ и къ нимъ примкнутыхъ двухъ прямоугольныхъ треугольниковъ.

591) Данный прямоугольный шестигранникъ разсѣчь діагональною плоскостью и вычислить поверхность одного изъ получившихся такимъ образомъ пятигранниковъ.

592) Найти, на сколько поверхность куба или прямоуг. шестригр. больше поверхности каждаго изъ двухъ равныхъ пятигранниковъ, изъ которыхъ данное тѣло м. б. составлено.

593) Сравнить площади нѣсколькихъ пятигранниковъ разсмотрѣннаго вида, выдѣленныхъ изъ нѣсколькихъ данныхъ кубовъ и прям. шестигранниковъ.

Всѣ пятигранники разсматриваемаго вида равны, если они выдѣлены изъ равныхъ кубовъ или равныхъ прям. шестигранниковъ. Въ самомъ дѣлѣ, у каждаго изъ этихъ тѣлъ есть по двѣ грани куба или прям. шестигран. изъ которыхъ онѣ выдѣлены и которыя, по этому, порознь равны между собою; эти грани наклонны другъ къ другу одинаково по равенству двугранныхъ угловъ между ними. При наложеніи одного такого пятигранника на другой равныя грани совмѣстятся. Совмѣстятся также и треугольныя грани къ нимъ примыкающія и. ч. они наклонены одинаково (подъ прямымъ угломъ) къ четыреугольнымъ гранямъ равнымъ между собою, такъ какъ онѣ суть треугольныя половины равныхъ квадратовъ или прямоугольниковъ. Наконецъ остальныя четыре-

угольныя грани совмѣстятся также п. ч. ихъ стороны, ограничивающія уже совмѣщенныя грани — совмѣстились.

594) Построить (изъ бумаги) пятиугольную половину даннаго куба или прям. шестигранника.

Всѣ пятигранники, выдѣленные изъ кубовъ подобны между собою п. ч. самые кубы подобны между собою.

Пятигранники, выдѣленные изъ прям. подобныхъ шестигранниковъ подобны между собою п. ч. у нихъ углы оказываются равными, а ребра и площади граней въ одно и тоже число разъ увеличенными или уменьшенными.

Пятигранники, которые мы до сихъ поръ разсматривали называются также *призмами* п. ч. отличаются, между прочимъ, тою особенностью, что грани, образующія ихъ поверхность раздѣляются на двѣ группы; къ первой изъ нихъ относятся три четыреугольныя грани, пересѣкающіяся между собою по параллельнымъ ребрамъ, которыя вмѣстѣ называются *боковою поверхностью*; къ другой группѣ относятся двѣ остальныя, треугольныя грани, называемыя въ призмахъ *основными гранями*.

Призмы могутъ имѣть безчисленное число боковыхъ граней, которыя всѣ пересѣкаются по параллельнымъ ребрамъ; основныхъ же граней всегда бываетъ только двѣ и плоскости ихъ параллельны. Фигуры боковыхъ граней всегда параллельны, а фигуры основныхъ граней всегда равны.

Призмы называются по числу боковыхъ граней. Такъ, разсматриваемыя нами пятигранники называются трегранными призмами, а кубы и прямоугольные шестигранники могутъ быть названы четырегранными призмами.

Призмы могутъ быть *прямыя*, у которыхъ основныя грани перпендикулярны боковымъ и *наклонныя*, у которыхъ первыя не перпендикулярны послѣднимъ.

Призмы называются правильными, если основныя грани суть правильныя многоугольники.

595) Вычертить фигуру развернутой данной пятигранной призмы.

596) Вычислить поверхность данной шестигранной призмы*).

---

*) Призмы берутся, въ этомъ случаѣ, прямыя т. е. такія, у которыхъ плоскости основныхъ граней перпендикулярны къ гранямъ боковой поверхности.

Вычисленіе поверхности прямой призмы можетъ быть упрощено, если обратимъ вниманіе на то обстоятельство, что боковая ея поверхность равняется площади прямоугольника, у котораго основаніе равно суммѣ сторонъ одной изъ основныхъ граней, а высота равна высотѣ боковой грани.

597) Построить пятигранную призму, боковая поверхность которой была бы ровна 10 кв. дюймамъ.

598) Построить семигранную призму, которой поверхность была бы равна 15⁰ кв. вершкамъ.

599) Построить призму, основными гранями которой были бы правильные пятиугольники.

600) По данной поверхности шестигранной призмы, у которой основныя грани суть правильные многоугольники определить длину боковаго ребра.

Двѣ или нѣсколько призмъ равны тогда, если они образованы одинаковымъ числомъ равныхъ граней одинаково расположенныхъ и пересѣкающихся подъ равными двухгранными и трехгранными углами.

601) Построить призму равную данной семигранной призмѣ.

602) По данной развернутой поверхности призмы построить самое тѣло.

Подобными могутъ быть только такія призмы, которыя имѣютъ одинаковое число порознь подобныхъ граней, одинаково расположенныхъ и пересѣкающихся подъ одними и тѣми же углами.

603) Построить призму подобную данной.

604) По данной развернутой поверхности какой нибудь призмы, постройть ей подобную, ребра которой были бы уменьшены въ 2, 3, 4 и т. д. разъ.

Всякая призма какого бы то нибыла числа граней можетъ быть раздѣлена плоскостями, проходящими черезъ двѣ несмежныя параллельныя ребра на трегранныя призмы, изъ которыхъ — на оборотъ — данная призма можетъ быть составлена.

605) Построить пересѣченіе данной четырехгранной призмы съ прямою пересѣкающею двѣ какія либо изъ параллельныхъ реберъ и параллельною основанія.

606) Построить пересѣченіе призмы плоскостью, проходящею черезъ два несмежныхъ параллельныхъ ребра.

607) Построить пересѣченіе призмы съ плоскостью прохо-

дящею через данную на одном из параллельных ребер точку и параллельною основанію.

608) Построить пересѣченіе поверхности призмы съ плоскостью, параллельною одной изъ боковыхъ граней призмы.

Пирамиды.

XI.

Если трегранную призму, выдѣленную путемъ разсѣченія куба или прям. шестигранника, діагональною плоскостью раздѣлимъ плоскостью, проходящею черезъ вершину какого либо изъ трехгранныхъ угловъ и противуположное ребро, то получимъ два тѣла, изъ которыхъ одно, меньшее, ограниченное четырьмя плоскостными гранями, называется четырегранникомъ.

Четырегранникъ можетъ быть произведенъ и иначе. Для этого достаточно какой либо трегранный уголъ разсѣчь плоскостью пересѣкающею всѣ три грани.

Четырегранникъ представляетъ тѣло, ограниченное наименьшимъ числомъ плоскостныхъ граней. Три плоскости, какъ бы мы неприводили ихъ, не могутъ образовать со всѣхъ сторонъ ограниченное тѣло.

(А сколько прямыхъ необходимо для того, чтобы образовалась прямолинейная фигура?)

Всякій четырегранникъ имѣетъ:

Вершинъ	4.
Реберъ.	6.
Граней.	4.
Плоскихъ угловъ	12.
Двугранныхъ угловъ	6.
Трегранныхъ угловъ	4.

Разсматриваемый четырегранникъ называется также *пирамидой*. Такъ называются вообще тѣла, у которыхъ основаніе многоугольникъ, а боковыя граны треугольники сходящіеся къ общей вершинѣ и образующіе многогранный уголъ.

Пирамиды называются треугольными, четыреугольными, тятиугольными и т. д. по числу сторонъ основанія. (Какой пирамидой будетъ выше разсмотрѣнный четырегранникъ?)

Она называется правильною, когда ея основанiе есть правильный многоугольникъ, а высота (т. е. перпендикуляръ, опущенный изъ вершины на основанiе) проходитъ черезъ центръ его.

Боковыя грани правильныхъ пирамидъ равны между собою. (Доказывается, при помощи соображенiя, что основанiя и прилежащiя къ нему углы всѣхъ треугольниковъ равны между собою). Всѣ ребра, сходящiяся къ вершинѣ также равны.

Всякая пирамида можетъ быть раздѣлена на нѣсколько пирамидъ, изъ которыхъ, на оборотъ—она можетъ быть сложена.

Поверхность пирамиды, какъ и всякаго плоскостнаго тѣла можетъ быть развернута на плоскости и представляется ограниченной сложной фигурой, составляющейся изъ фигуръ всѣхъ боковыхъ граней и основанiя.

Равными бываютъ такiя пирамиды, которыя состоятъ изъ одного и того же числа граней, одинаково расположенныхъ и пересѣкающихся подъ соотвѣтственно равными двугранными углами. (Доказ. см. выше).

Пирамиды подобны, когда имѣютъ одно и тоже число граней подобныхъ, одинаково расположенныхъ и пересѣкающихся подъ соотвѣтственно равными углами.

609) Вычертить фигуру поверхности данной пирамиды, развернутой на плоскости.

610) По данной фигурѣ поверхности развернутой на плоскости построить пирамиду.

611) Вычислить поверхность данной четыреугольной пирамиды.

Какое упрощенiе возможно при вычисленiи въ томъ случаѣ, если данная пирамида правильная?

612) Построить треугольную пирамиду, поверхность которой равнялась бы 10 кв. вершкамъ.

613) Построить кубъ, поверхность котораго равнялась бы поверхности данной пирамиды.

614) Построить точки пересѣченiя данной пирамиды прямою параллельною плоскости и пересѣкающею два несмежныя ребра.

615) Построить точки пересѣченiя данной пирамиды съ прямою параллельною одному изъ боковыхъ реберъ и проходящей черезъ средину другаго ребра.

616) Построить пересѣченiе данной пирамиды съ плоскостью, проходящею черезъ два несмежныя ребра.

617) Построить пересѣченіе данной пирамиды съ плоскостью параллельною основанію и проходящею черезъ средину одного изъ реберъ.

618) Построить пересѣченіе пирамиды съ плоскостію перпендикулярною къ одному изъ реберъ и проходящою черезъ его средину.

619) Построить нѣсколько многогранниковъ со стоящихъ изъ правильныхъ треугольныхъ пирамидъ.

620) Построить какой либо многогранникъ и раздѣлить его на треугольныя пирамиды.

621) По троить нѣсколько правильныхъ многогранниковъ (изъ равносторонниxъ треугольниковъ, квадратовъ и т. д.)

622) Построить фигуру поверхности даннаго восьмигранника.

623) Вычислить поверхность даннаго 12 гранника.

Тѣла кривоповерхностныя.

Цилиндръ и конусъ.

XII.

Изъ тѣлъ, образованныхъ кривыми поверхностями особеннаго вниманія заслуживаютъ тѣла очень знакомыя каждому изъ насъ: *цилиндръ*, *канусъ* и *шаръ*.

Поверхность цилиндра состоитъ изъ трехъ частей: изъ боковой кривой поверхности и изъ двухъ плоскостныхъ основаній параллельныхъ между собою и имѣющихъ форму равныхъ между собою круговъ *).

При внимательномъ разсмотрѣніи боковой поверхности цилиндра оказывается, что къ ней можетъ прилегать, на всемъ протяженіи, прямая приложенная въ опредѣленномъ направленіи, отчего эту поверхность называютъ иногда *линейчатою.* Въ зависимости отъ этого свойства разсматриваемой поверхности, на ней можно провести въ опредѣленномъ направленіи множество прямыхъ линій, которыя оказываются параллельными между собою. Цилиндрическая поверхность можетъ быть произведена изъ плоскости (изъ листа бумаги

---

*) Здѣсь разсматриваются только цилиндры (а также и конусы) съ круговымъ основаніемъ.

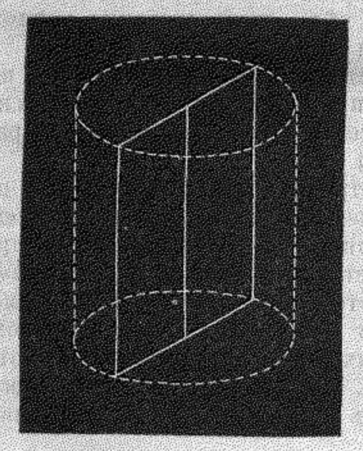
или желѣза) если послѣднюю изогнуть въ одномъ какомъ либо направленіи; поэтому она можетъ быть, подобно боковой поверхности призмы, рззвернута на плоскости. Если возьмемъ правильную многогранную призму съ большимъ числомъ боковыхъ граней, то получимъ тѣло близко подходящее къ цилиндру, и чѣмъ большее число боковыхъ граней будетъ имѣть призма, тѣмъ менѣе она отличается отъ цилиндра. Поэтому, цилиндръ можно разсматривать какъ правильную призму имѣющую очень большое число боковыхъ граней.

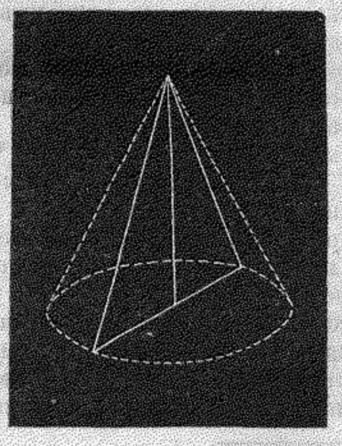
Поверхность конуса состоитъ изъ двухъ частей: изъ линейчатой поверхности съуживающейся по мѣрѣ приближенія къ вершинѣ и плоскости, ограниченнаго кругомъ основанія.

Боковая поверхность конуса отличается отъ такой же поверхности цилиндра только тѣмъ, что прямыя проведенныя на ней пересѣкаются въ вершинѣ конуса. И она можетъ быть развернута на плоскости, подобно цилиндрической поверхности.

Конусъ можно разсматривать какъ пирамиду имѣющую очень большое число боковыхъ граней.

Цилиндръ образуется вращеніемъ прямоугольника около прямой параллельной двумъ противулежащимъ сторонамъ





и равно отстоящей отъ послѣдней. Прямая, около которой происходитъ вращеніе называется *осью цилиндра.* Она со-

единяетъ центры обѣихъ основаній, перпендикулярна къ плоскостямъ основанія и параллельна прямымъ, которыя могутъ быть проведены на боковой поверхности разсматриваемаго тѣла.

Конусъ образуется отъ вращенія около своей высоты равнобедреннаго треугольника.

Прямая, около которой происходитъ вращеніе называется *осью* конуса; она соединяетъ центръ основанія съ вершиной тѣла и перпендикулярна къ основной плоскости.

Поверхность цилиндра будучи развернута на плоскости представляется ограниченною тремя фигурами: прямоугольникомъ, у котораго основаніе равно длинѣ окружности, а высота — высотѣ цилиндра и двухъ круговъ, изъ которыхъ одинъ касается основанія, а другой противуположной стороны. Чтобы построить поверхность цилиндра развернутую на плоскости необходимо, стало быть, измѣрить высоту цилиндра и длину окружности (при помощи нитки) и по этимъ даннымъ построить прямоугольникъ, представляющій въ разверткѣ боковую поверхность, а затѣмъ, по измѣренному радіусу, круговыя основанія.

Развертка поверхности конуса представляется въ видѣ двухъ фигуръ, изъ которыхъ одна будетъ кругъ равный основанію, а другая треугольникъ, ограниченный съ одной стороны дугою, описанной радіусомъ равнымъ разстоянію вершины отъ одной изъ точекъ на окружности основанія; длина дуги при этомъ развернутая въ прямую должна быть равна длинѣ окружности основанія. Поэтому, чтобы построить фигуру поверхности конуса развернутую на плоскости необходимо измѣрить: а) длину радіуса основанія, б) разстояніе вершины отъ одной изъ точекъ на окружности основанія и в) длину окружности основанія.

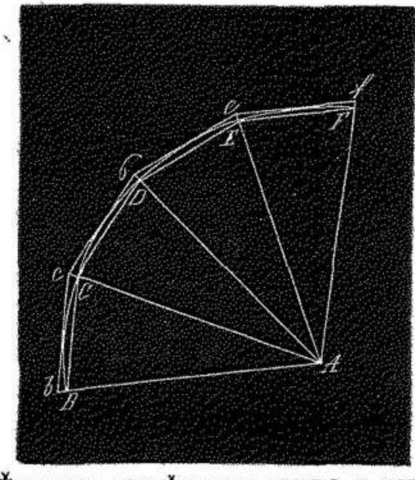
Затѣмъ проводится прямая, изъ какой либо точки на ней, какъ центра, радіусомъ равнымъ разстоянію вершины отъ окружности основанія описывается дуга, по которой откладывается (при помощи нитки) длина равная длинѣ окружности; соединяя конецъ дуги съ центромъ ея получаемъ фигуру развернутой боковой поверхности. Фигура круга касательнаго съ дугою, построенной для боковой поверхности, вычерчивается по радіусу основанія.

Приблизительное вычисленіе поверхности цилиндра дѣлается слѣдующимъ образомъ. Вычисляется площадь развер-

нутой боковой поверхности и складывается съ приблизительно вычисленной, площадью круга (см. выше), взятою два раза.

Поверхность конуса можетъ быть приблизительно вычислена подобнымъ же образомъ. Вычисляется приблизительно площадь круговаго основанія и придается къ приблизительно же вычисленной площади развернутой боковой поверхности конуса *).

Цилиндры равны между собою, если основаніе и высота одного равны основанію и высотѣ другого потому что по наложеніи ихъ одинъ на другой равными основаніями по-



слѣднія совмѣстятся; совмѣстятся также и высоты или точнѣе оси цилиндровъ, какъ обѣ перпендикулярны къ совмѣстившимся плоскостямъ и равны между собою. Боковыя поверхности цилиндровъ также совмѣстятся потому что всѣ точки ихъ равно удалены отъ осей. Остаются верхнія основ-

---

*) Площадь треугольной фигуры, представляющей развернутую боковую поверхность можно приблизительно вычислить слѣдующимъ образомъ: дуга раздѣляется на равныя части, точки дѣленія соединяются прямыми, затѣмъ проводится рядъ касательныхъ параллельныхъ этимъ прямымъ. Остается вычислить площади многоугольниковъ ABCDEF и Abcde и сумма ихъ раздѣленная пополамъ (см. выш.) и будетъ прибтизительная ветичина искомой площади.

ныя грани, которыя также совмѣстятся, потому что перпендикулярны къ общей оси обѣихъ цилиндровъ.

Два конуса равны, когда основаніе и высота одного равны основанію и высотѣ другаго, потому что у такихъ конусовъ, при наложеніи одного на другой—основанія и высоты совмѣстятся, а потому и боковыя поверхности, какъ произведенныя одинаковымъ образомъ (движеніемъ прямой упирающейся въ вершину и вращающейся по кругу основанія) неминуемо также совпадаютъ.

Подобны два цилиндра тогда, если діаметръ основаній и высота одного изъ нихъ въ одно и тоже число разъ больше или меньше чѣмъ у другаго.

Два конуса подобны, если діаметръ основанія и высота одного изъ нихъ въ одно и тоже число разъ больше или меньше чѣмъ у другого *).

624) Построить (при помощи проволочныхъ или бумажныхъ круговъ и нитокъ) цилиндръ, у котораго діаметръ основанія былъ бы въ $1^1/_2$ вершка, а высота въ 2 вершка.

625) Построить конусъ, у котораго площадь основанія была бы (приблизительно) въ 4 кв. верш., а высота въ 2 вершка.

626) Построить развернутую поверхность даннаго цилиндра.

627) По данной развернутой поверхности построить цилиндръ.

628) Построить развернутую поверхность даннаго конуса.

629) По развернутой поверхности, построить конусъ.

630) Вычислить (приблизительно) поверхность даннаго цилиндра.

631) Вычислить поверхность даннаго конуса.

632) Построить цилиндръ, котораго поверхность была бы около 12 кв. вершковъ.

633) Построить конусъ, поверхность котораго была бы около 15 кв. вершковъ.

634) Построить два конуса, изъ которыхъ поверхность перваго была бы вдвое болѣе поверхности втораго.

635) Построить цилиндръ и конусъ съ равными, приблизительно, поверхностями.

---

*) Оба эти положенія доказываются при помощи сравненія цилиндра и конуса съ призмой и пирамидой.

636) Построить пересѣченіе цилиндра плоскостью, параллельною основанію.

637) Обозначить пересѣченіе конуса плоскостью проходящею черезъ вершину и діаметръ основанія.

Шаръ.

XIII.

Шаръ есть тѣло, ограниченное сплошною кривою поверхностью и имѣющее со всѣхъ сторонъ совершенно одинаковое образованіе и одинаковую кривизну. Поверхности одного и того же шара, при наложеніи ихъ одна на другую, могутъ совмѣщаться.

Всѣ точки поверхности шара равно удалены отъ срединной точки—*центра*.

Прямыя, проведенныя отъ центра шара къ точкамъ на поверхности его суть *радіусы* шара, которые всѣ равны по длинѣ потому что разстоянія всѣхъ точекъ шаровой поверхности отъ центра одинаковы.

Діаметрами и осями шара называются прямыя соединяющія двѣ какія либо точки на его поверхности и проходящія черезъ центръ.

Длиною радіуса шара обусловливается большая или меньшая величина тѣла и кривизна его поверхности; чѣмъ больше радіусъ, тѣмъ больше величина шара и тѣмъ менѣе кривизна его поверхности.

Черезъ всѣ вершины всякаго правильнаго многогранника можетъ быть проведена шаровая поверхность, потому что онѣ равно удалены отъ центра.

Шаръ есть правильное тѣло и въ этомъ отношеніи, по своему виду и свойствамъ, походитъ на всѣ правильные многогранники.

При этомъ нужно замѣтить, что чѣмъ больше число граней правильнаго многогранника, тѣмъ онъ болѣе походитъ на шаръ. Многогранникъ, съ очень большимъ числомъ граней, трудно отличить отъ шара и вообще безъ большой погрѣшности онъ можетъ быть принятъ за шаръ.

Поверхность шара не можетъ быть развернута на плоско-

сти потому что представляется изогнутою не по одному только направленію. Прямая линія, будучи приложена къ шаровой поверхности прилегаетъ къ ней только въ одной точкѣ въ какомъ бы мѣстѣ и направленіи мы ее не прикладывали.

Шаровая поверхность можетъ быть образована вращеніемъ полуокружности около діаметра, какъ оси; въ этомъ случаѣ поверхность будетъ слѣдомъ движенія полуокружности, которой всѣ точки равно удалены отъ центра, стало быть, всѣ точки этого слѣда также будутъ равно удалены отъ центра.

Діаметръ шара есть наибольшая изъ прямыхъ соединяющихъ двѣ точки поверхности этого тѣла. Для доказательства этого стоитъ только соединить центры шара съ концами прямой, соединяющей двѣ точки на шаровой поверхности и не проходящей черезъ центръ тѣла; тогда образуется ломаная, соединяющая концы разсматриваемой прямой (не проходящей черезъ центръ) и очевидно большая, чѣмъ послѣдняя; а такъ какъ эта ломаная состоитъ изъ двухъ радіусовъ шара, то она равна діаметру его. Отсюда заключаемъ, что діаметръ шара больше всякой прямой, соединяющей двѣ точки на шаровой поверхности и не проходящей черезъ центръ.

Сѣченіе плоскости съ поверхностію шара есть кругъ. Это легко доказать слѣдующимъ образомъ: всѣ точки кривой сѣченія лежатъ на плоскости и въ то же время равно отстоятъ отъ центра шара потому что лежатъ и на поверхности его, стало быть прямыя, соединяющія точки кривой сѣченія съ центромъ шара суть равныя наклонныя, а потому основанія ихъ равно удалены отъ основанія перпендикуляра, опущеннаго на плоскость, которое и будетъ центръ круга сѣченія.

Плоскость, проходящая черезъ центръ шара пересѣкаетъ поверхность послѣдняго по кругу называемому *большимъ* кругомъ въ отличіе отъ *малыхъ* круговъ, по которымъ пересѣкаются съ шаровою поверхностію плоскости, не проходящія черезъ центръ. Это можетъ быть доказано при помощи соображенія, что діаметръ шара больше всякой изъ хордъ, а такъ какъ діаметръ большаго круга есть вмѣстѣ съ тѣмъ и діаметръ шара; діаметры же всѣхъ малыхъ круговъ суть хорды шара, то очевидно, что первые длиннѣе послѣднихъ, а стало быть и круги образующіеся при пере-

сѣченіи плоскости, проходящей черезъ центръ шара съ поверхностію его будутъ большіе изъ круговъ, которые могутъ быть обозначены на шаровой поверхности.

Плоскостью, проходящею черезъ центръ шара, его поверхность раздѣляется на двѣ равныя, совмѣстимыя части.

По наложеніи одной части на другую такъ, чтобы круги сѣченія обѣихъ частей совпали, а части поверхностей шара были обращены въ одну и туже сторону отъ совмѣстившихся плоскостей круговъ—самыя части поверхностей неминуемо совмѣстятся потому что ни одна изъ нихъ не можетъ пойти ни внутри, ни внѣ другой, такъ какъ въ такомъ случаѣ отстояніе совмѣстившихся центровъ обѣихъ поверхностей отъ точекъ взятыхъ на нихъ т. е. радіусы — небыли бы равны, что невозмомно, если взяты части одного и того же шара.

Двѣ, взаимно перпендикулярныя и проходящія черезъ центръ шара плоскости дѣлягъ какъ шаръ токъ и поверхность его на четыре равныя части (Док. под. предыдущею.)

Три взаимно перпендикулярныя плоскости, проходящія черезъ центръ шара дѣлятъ шаръ и поверхность его на 8 равныхъ частей. (Док. под. предыдущему).

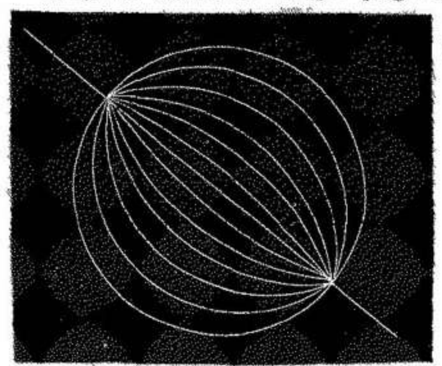
Шаровая поверхность неможетъ быть развернута на плоскости потому что имѣетъ изогнутость не въ одномъ только направленіи; поэтому, измѣренію этой поверхности, точно также какъ и другихъ нелинейчатыхъ поверхностей, не такъ легко, какъ измѣреніе уже разсмотрѣнныхъ поверхностей. Приблизительное вычисленіе этой поверхности дѣлается при помощи вспомогательныхъ—цилиндра и двухъ конусовъ будетъ ниже показано.

Два шара равны между собою, если ихъ радіусы равны.

Это ясно обнаруживается, если представимъ себѣ одинъ шаръ наложеннымъ на другой такъ, чтобы центры ихъ совмѣщались; тогда поверхности обѣихъ шаровъ совмѣстятся одна съ другою потому что обѣ, во всѣхъ точкахъ, равно удалены отъ совмѣстившихся центровъ.

Всѣ шары подобны между собою потому что имѣютъ совершенно правильное и всегда одинаковое образованіе и могутъ различаться лишь величиною, которая, какъ указано раньше, обусловливается длиною радіуса.

638) На данномъ шарѣ (образованномъ изъ проволокъ) построить: радіусъ, діаметръ, двѣ равныя хорды, сѣкущую и касательную.



94) Построить прямую касательную къ данному (массивному—изъ дерева) шару.

95) Построить точки пересѣченія данной прямой съ поверхностью шара.

96) Провести плоскость касательную къ поверхности даннаго шара.

639) Построить пересѣченіе данной плоскости съ поверхностью шара.

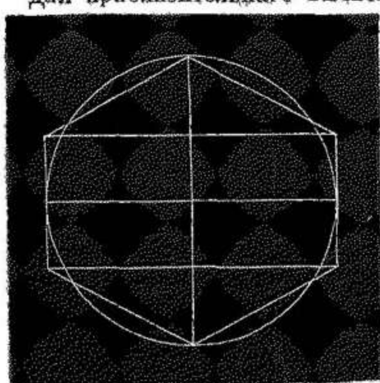
640) Построить малый и большой круги на поверхности даннаго шара.

641) Построить пересѣченіе съ шаровою поверхностью двухъ перпендикулярныхъ и параллельныхъ плоскостей.

642) Построить цилиндръ и конусъ касательные къ поверхности даннаго шара.

643) Построить пересѣченіе поверхностей даннаго шара съ поверхностями цилиндра и конуса.

Для приблизительнаго вычисленія поверхности шара строятъ цилиндръ касающійся къ поверхности даннаго шара по большому кругу и плоскости основанія котораго проходятъ черезъ средины частей діаметра перпендикулярнаго къ плоскости этаго большаго круга; конусы имѣютъ основанія общія съ основаніями цилиндра, а вершины въ концахъ упомянутаго діаметра. Если поверхности частей, расположенныхъ у концевъ діаметра и больше соотвѣтствующихъ поверхностей конусовъ, то, очевидно, поверхность срединной



части шара меньше поверхности цилиндра съ остальными отрѣзками поверхностей конуса—такъ что, находя поверхности построенныхъ вспомогательныхъ тѣлъ, мы приблизительно находимъ и поверхность шара.

102) Вычислить приблизительно поверхность стекляннаго шара, котораго радiусъ равняется 3 вершкамъ.

Далѣе даются рядъ задачъ на вычисленiе поверхностей сложныхъ и неправильныхъ тѣлъ, при помощи вспомогательныхъ и простыхъ тѣлъ. Для этаго самое лучшее—приносить въ классъ предметы, поверхности которыхъ вычисляются на основанiи данныхъ, полученныхъ путемъ измѣренiя.

Объ объемахъ и ихъ измѣренiи.

Всякое тѣло занимаетъ какое нибудь мѣсто, какую нибудь часть пространства. Эта часть пространства можетъ быть меньшею или большею въ зависимости отъ величины тѣла Если мы возьмемъ два равныхъ куба, то они очевидно занимаютъ одинаковой величины мѣсто въ пространствѣ, если же тѣла возьмемъ не равныя, то большее займетъ больше мѣста чѣмъ меньшее.

Часть пространства занимаемую тѣломъ обыкновенно называютъ *объемомъ тѣла*.

Объемы равныхъ тѣлъ равны между собою. Но есть тѣла, хотя и неравныя, но имѣющiя одинаковыя объемы. Для того чтобы убѣдиться въ этомъ возьмемъ какое либо изъ простыхъ выше разсмотрѣнныхъ тѣлъ напр. кубъ и разсѣчемъ его на двѣ части плоскостью перпендикулярною къ одной изъ граней. Тогда получимъ два прямоугольныхъ шестигранника, сумма объемовъ которыхъ будетъ очевидно равна объему куба, а между тѣмъ изъ нихъ мы можемъ построить нѣсколько тѣлъ отнюдь не похожихъ на кубъ и во всякомъ случаѣ не равныхъ ему (сравни тоже самое изъ ст. о площадяхъ).

Если разсѣчемъ кубъ дiагональною плоскостью, или плоскостью, проходящею черезъ средины четырехъ параллельныхъ реберъ, то получимъ двѣ равныя призмы (въ первомъ слу-

чаѣ) или же два равные же прям. шестигранника (во второмъ). Очевидно, что объемъ каждаго изъ полученныхъ тѣлъ будетъ ровенъ $^1/_2$ объема даннаго куба.

644) Построить прямоугольный шестигранникъ объемъ котораго былъ бы вдвое, втрое, вчетверо и т. д. больше объема даннаго куба или прям. шестигранника.

645) Построить, призму объемъ которой былъ бы въ 4 раза меньше объема даннаго куба или прямоугольнаго шестигранника.

646) Построить прямоугольный шестигранникъ и призму равнаго объема съ даннымъ кубомъ.

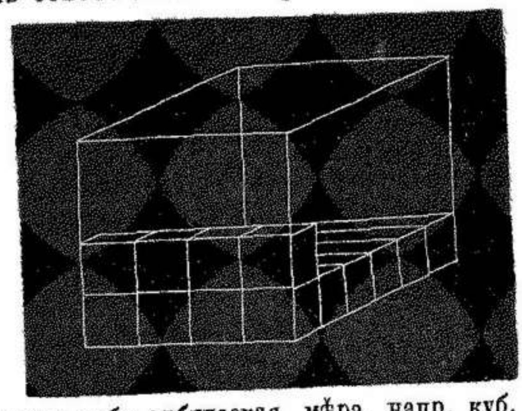
647) Построить пирамиду равнаго объема съ данной треугольной призмой.

648) Построить два цилиндра, изъ которыхъ одинъ былъ бы вдвое большаго объема чѣмъ другой.

Объемы, какъ и всякія величины, могутъ быть измѣряемы; только для этаго необходимо выбрать подходящія единицы мѣры.

Мѣры, которыми обыкновенно измѣряются объемы называются кубическими мѣрами или мѣрами объемовъ. Кубическими—они называются потому, что каждая такая единица мѣры представляетъ кубъ опредѣленныхъ размѣровъ. Кубическая сажень—это объемъ куба, ребра котораго въ сажень длины; кубическій футъ—это объемъ куба, ребра котораго въ футъ длиною и т. д.

Измѣрить объемъ какого либо тѣла значитъ узнать сколь-



ко разъ какая либо кубическая мѣра напр. куб. футъ въ

немъ содержится. Возьмемъ какой нибудь прямоугольный шестигранникъ и покажемъ какъ измѣрить его объемъ при помощи куб. мѣры. Выберемъ какую либо мѣру, напр. куб. дюймъ и станемъ его укладывать на нижней грани такъ, чтобы кубики помѣщались въ пространствѣ занимаемомъ тѣломъ.

Сначала будемъ класть кубики одинъ къ другому въ рядъ располагая ихъ по ребру *аб*; когда мы уложили въ этомъ ряду достаточное число кубиковъ—тогда кладемъ 2-й, 3-й и т. д. ряды, покуда вся нижняя грань не покроится кубиками. Образовавшійся такимъ образомъ слой кубиковъ представляетъ прямоугольный шестигранникъ, у котораго площадь основанія будетъ заключать въ себѣ число квадр. дюймовъ равное число упомянутыхъ кубиковъ, а высоту равную одному дюйму. Ясное дѣло, что объемъ этого слоя = числу куб. дюймовъ въ немъ заключающемуся, а это послѣднее равно числу квадратныхъ дюймовъ площади основанія. Такъ что, еслибы выбранный нами прямоугольный шестигранникъ былъ только въ дюймъ высотою и верхняя грань слоя, стало бить, совпадала бы съ верхнею гранью измѣряемаго тѣла то объемъ послѣдняго = бы такому же числу куб. дюймовъ какое помѣстилось на площади основанія.

Далѣе продолжается укладываніе слоевъ кубиковъ до тѣхъ поръ покуда верхняя грань какого либо слоя подойдетъ къ верхней грани измѣряемаго тѣла. Послѣ этого, весь объемъ выбраннаго тѣла оказывается заполненнымъ. Теперь, чтобы найти объемъ его стоитъ только сосчитать число умѣстившихся туда кубиковъ и мы получимъ число выражающее искомый объемъ. Но вмѣсто того, чтобы считать кубики одинъ за однимъ, мы можемъ сосчитать число слоевъ, затѣмъ число рядовъ въ слоѣ (которое одинаково для всѣхъ слоевъ) и наконецъ число кубиковъ въ ряду (которое опять одинаково во всѣхъ рядахъ и во всѣхъ слояхъ). А потомъ уже искомое число нетрудно найти вычисленіемъ. Положимъ что по высотѣ помѣстилось 3 слоя кубиковъ, въ каждомъ изъ нихъ по 5 рядовъ, а въ каждомъ изъ послѣднихъ по 4 кубика. Число всѣхъ кубиковъ найдется, если число кубиковъ въ ряду $\times$ на число рядовъ и произведеніе т. е. число кубиковъ въ слоѣ, на число слоевъ: $4 \times 5 \times 3 = 60$ куб. дюймовъ.

А если обратимъ вниманіе на то обстоятельство, что число кубиковъ въ ряду обусловливается длиною одного изъ ре-

беръ нижней грани, число рядовъ — длиною другаго ребра этой же грани сходящагося съ первымъ въ одну точку и наконецъ число слоевъ — длиною третьяго ребра, сходящаго съ первыми двумя въ одну общую точку — то измѣреніе объема прямоугольныхъ шестигранниковъ сведется на измѣреніе трехъ реберъ, идущихъ по тремъ различнымъ направленіямъ: длины, ширины и толщины тѣла.

640) Измѣрить объемъ этой шкатулки или комнаты.

650) По даннымъ: длинѣ трехъ реберъ опредѣлить объемъ прямоугольнаго шестигранника.

651) По даннымъ площади одной изъ граней и длинѣ перпендикулярнаго къ этой грани ребра, опредѣлить объемъ прямоугольнаго шестигранника.

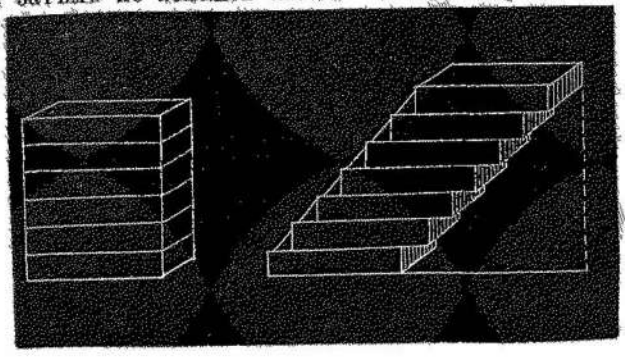
652) По даннымъ: объему прямоугольнаго шестигранника и площади основанія опредѣлить высоту (или длину ребра, перпендикулярнаго къ основной грани).

653) По даннымъ: объему прямоугольнаго шестигранника и высотѣ, опредѣлить площадь основанія.

654) По даннымъ: высотѣ и длинѣ опредѣлить толстоту прямоугольнаго шестигранника.

Объемъ наклонной четыреугольной призмы равняется объему прямоугольнаго шестигранника, построеннаго на общемъ съ призмой основаніи и имѣющимъ съ нею одну и туже высоту. Въ этомъ нетрудно убѣдить учениковъ, при помощи прямоугольника шестиграннаго и сложеннаго изъ равныхъ между собою дощечекъ прямоугольно шестигранной формы; всѣ дощечки должны быть равной высоты.

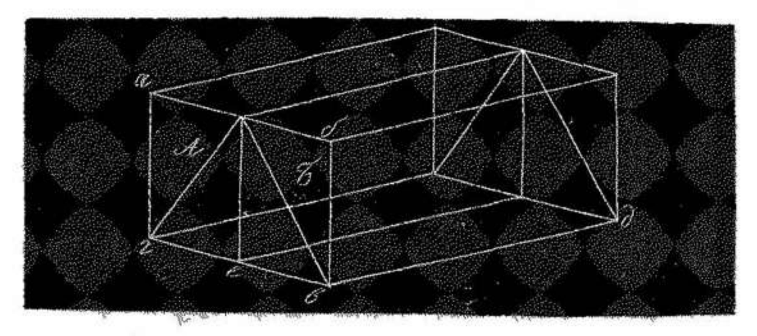
Сначала изъ нихъ складывается прямоугольный шестигранникъ, затѣмъ не измѣняя мѣста основной грани это тѣло



обращают въ наклонную призму; далѣе послѣднюю превращают въ новую призму другого наклона и т. д. При этихъ превращеніяхъ ученики замѣчаютъ, что высоты тѣла и основанія не измѣнились и объемы ихъ оставались равными. Впрочемъ, прямой шестигранникъ, измѣняемый въ призму вышелъ съ уступами съ обѣихъ сторонъ, но легко показать что выступы эти будучи срѣзаны съ одной стороны совершенно заполнятъ соотвѣтствующіе имъ пустоты съ другой, отъ чего и образуется совершенно правильная призма.

Для большей убѣдительности можно взять нѣсколько различно наклоненныхъ призматическихъ сосудовъ съ равными основаніями и высотами и наполнять ихъ водою, пескомъ, зерномъ и т. д. Ученики и здѣсь убѣдятся въ справедливости высказаннаго положенія. Отсюда заключаемъ, что для вычисленія объема наклонной четыреугольной призмы нужно *площадь основанія умножить на высоту*, чему какъ мы видѣли выше равняется объемъ прямоугольнаго шестигранника имѣющаго общую съ призмой высоту и основаніе.

Чтобы измѣрить объемъ прямой треугольной призмы, около нее строятъ прямоугольный шестигранникъ, на одной изъ боковыхъ граней, какъ показано на фигурѣ. Легко доказать, что объемъ призмы вдвое меньше объема построеннаго прямаго шестигранника. Въ самомъ дѣлѣ, если построенный прямой шестигранникъ разсѣчемъ плоскостью проходящею черезъ верхнее ребро призмы и перпендикулярною къ нижней ея грани, то вспомогательный шестигранникъ разсѣчется



на два прямоугольныхъ шестигранника, изъ которыхъ каждый, въ свою очередь раздѣленъ гранями данной призмы на двѣ равныя треугольныя призмы. Отсюда видно, что призмы А

и Б, на сумму объемовъ которыхъ—объемъ вспомогательнаго прям. шестигранника отличается отъ объема данной призмы—равны частямъ послѣдней. Стало быть вспомогательный прямоугольный шестигранникъ, по объему, вдвое больше данной призмы. Остается теперь измѣрить объемъ перваго и раздѣлить его на 2 и получимъ объемъ послѣдней. Для этого возьмемъ половину площади грани *а б в г* и число кв. мѣръ выражающее ее помножимъ на число линейныхъ мѣръ заключающееся въ ребрѣ в д, что выразится такъ: $^1/_2$ *г в* $\times$ *в д* $\times$ *в б*, или же площадь основной грани призмы на высоту ея.

Тоже самое не трудно доказать и по отношенію къ наклонной призмѣ; только здѣсь придется построить наклонную же четыреугольную вспомогательную призму.

Отсюда ясно, что всѣ призмы съ равными основаніями и равными высотами *равнообъемны*.

655) Вычислить объемъ данной пятиугольной призмы.

656) По данному объему призмы и ея высотѣ опредѣлить площадь основной грани.

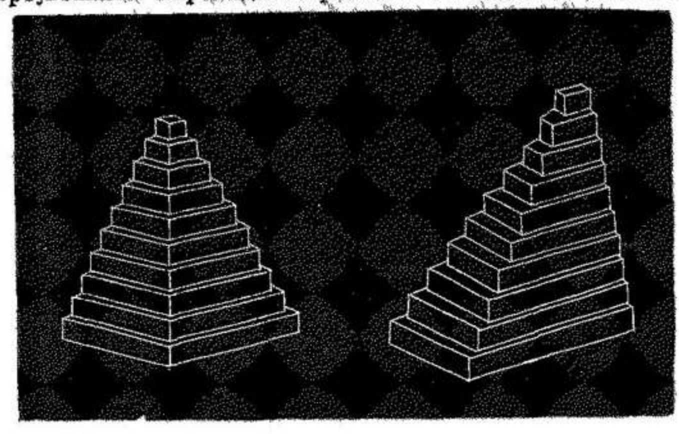
657) По данной площади основной грани и объему опредѣлить высоту призмы.

658) Вычислить объемъ прямаго цилиндра.

659) По данному объему цилиндра и его высотѣ, опредѣлить площадь основанія.

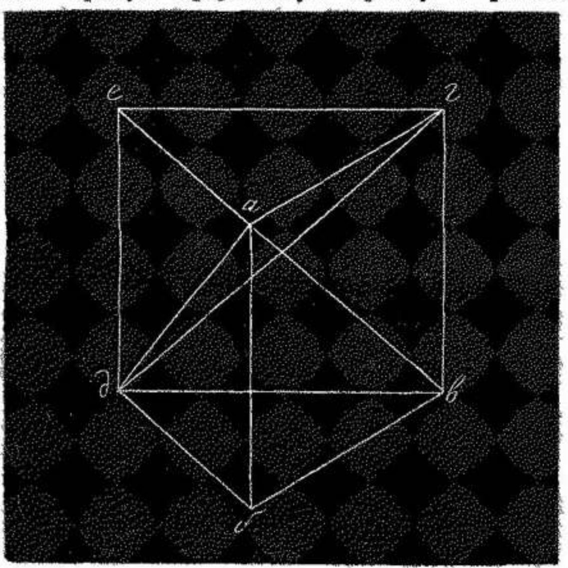
660) По данной площади основанія цилиндра и его объему, опредѣлить высоту.

Треугольныя пирамиды съ равными основаніями и высотами



равнообъемны. Для того, чтобы убѣдить учениковъ въ этомъ, можно взять нѣсколько треугольныхъ пирамидъ съ равными высотами и равными основаніями, сдѣланныхъ изъ жести съ пустотами внутри. Наполняя эти пустоты водой, пескомъ, зерномъ и т. п. легко убѣдиться въ ихъ равномѣрности. Но можно воспользоваться для этой цѣли приборомъ выше приведеннымъ (въ ст. объ объемѣ призмъ *) и состоящимъ изъ нѣсколькихъ паръ подобныхъ треугольниковъ съ постепенно уменьшающимися сторонами и представляющихъ равновысотныя треугольныя призмы. Строя изъ этихъ призмъ пирамиды различнаго вида съ равномѣрными или равными основаніями, ученики легко замѣтятъ равенство объемовъ ихъ при равенствѣ высотъ, которые приблизительно равны суммѣ объемовъ всѣхъ призмъ, входящихъ въ составъ пирамиды, и которые составлены изъ равныхъ призмъ.

Возьмемъ прямую треугольную призму и разсѣчемъ ее



плоскостью проходящею черезъ точку *а* и ребро *дв* и затѣмъ

---

*) Оба эти прибора мы заимствовали у П. Фанъ-деръ-Флита. См. Элем. курсъ геометр. Спб. 1862 г. стр. 153.

плоскостію проходящею черезъ точку $а$ и діагональ $дг$, тогда призма разсѣчется на три равнообъемныя пирамиды: $адбв$, $даег$ и $агвд$. У первыхъ двухъ основанія $аег$ и $дбв$ равны потому что это суть равныя основанія призмы и высоты равны ($гв = де$), какъ ребра боковыхъ граней призмы; пирамида же $авгд$ со второй т. е. $аедг$ имѣютъ равныя основанія $дгв = дге$ и общую вершину, точку $а$ стало быть и общую высоту потому что основанія обѣихъ пирамидъ лежатъ на одной грани. Поэтому всѣ три пирамиды равномѣрны и объемъ каждой изъ нихъ $^1/_3$ объема призмы.

Какую бы мы не построили треугольную призму всегда мы можемъ раздѣлить ее на три равномѣрныя треугольныя же пирамиды, изъ которыхъ двѣ имѣютъ своими основаніями призмы и общую съ послѣднею высоту. По этому, и эти три пирамиды будутъ имѣть объемы составляющіе $^1/_3$ объема призмы, и объемы двухъ изъ этихъ пирамидъ могутъ быть выражены такъ: площадь основанія $\times$ на $^1/_3$ высоты. Если, при этомъ, обратимъ вниманіе на то обстоятельство, что ко всякой данной треугольной пирамидѣ можетъ быть пристроена призма, имѣющая съ первою одну и ту же высоту и общее основаніе и, что, въ этомъ случаѣ, мы легко доказать, что объемъ данной пирамиды составляетъ $^1/_3$ объема построенной призмы, то легко усмотрѣть, что объемъ всякой трегранной призмы найдется, если площадь основанія или точнѣе число кв. мѣръ выражающее эту площадь будетъ умножено на $^1/_3$ числа, выражающаго длину высоты.

Такъ какъ всякая пирамида можетъ быть раздѣлена на треугольныя пирамиды, то легко вывести, что объемъ какой бы то ни было пирамиды находится, если площадь основанія умножимъ на $^1/_3$ высоты.

661) Вычислить объемъ пирамиды съ пятиугольнымъ основаніемъ.

662) По данному объему пирамиды и ея высотѣ, найти площадь основанія.

663) По данной площади основанія пирамиды и объему ея найти высоту.

664) Найти объемъ даннаго конуса.

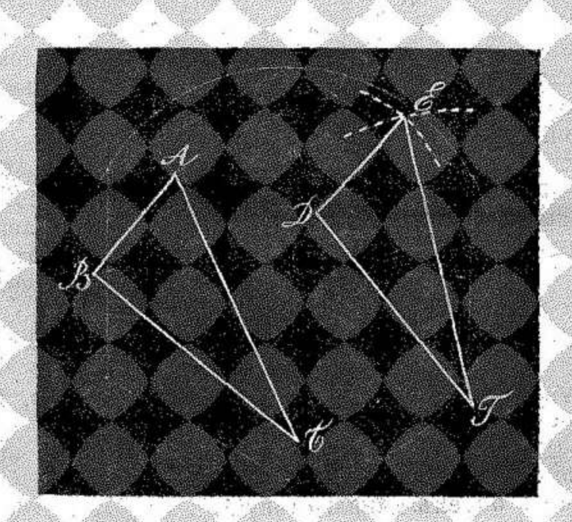
665) По объему конуса и высотѣ, найти площадь основанія.

666) По данной площади основанія конуса и объему, найти его высоту.

Объемъ шара приблизительно находится, при помощи вспомогательныхъ цилиндра и двухъ конусовъ, которые были уже употреблены нами, при вычисленіи поверхности этого тѣла. Вычисливъ объемъ средняго цилиндра и одного изъ конусовъ, складываютъ число выражающее объемъ перваго съ удвоеннымъ числомъ выражающимъ объемъ втораго и получаютъ приблизительный объемъ шара.

667) Вычислить объемъ шара, радіусъ котораго $^3/_4$ вершка.

Въ заключеніе дается рядъ задачъ на вычисленіе (приблизительно, объемовъ сложныхъ и неправильныхъ тѣлъ, при помощи вспомогательныхъ простыхъ тѣлъ.



Чертежъ слѣдуетъ къ страницѣ 111.